

含有球形介在物材料的弹性模量

日本金泽大学 广濑 幸雄 林政 佐佐木 敏彦

著者利用了等价介在物^①和矩阵的方法,依据 Mori-Tanaka 的结论,提出了一个含有椭圆形介在物材料的应力—应变的关系式。并利用这个关系式讨论了含有球形介在物材料的弹性行为,进一步得到了材料整体的弹性模量。在本研究中所涉及的材料其基体和介在物均为各向同性材料,介在物的体积相对于基体是非常地小并与基体紧密相联。其结果显示出了含有球形介在物的材料具有各向同性物质的性质。提出了提高这种材料弹性模量的途径。

The Overall Elastic Moduli of Composite Material with Spherical Inclusions

Yukio Hirose Zheng Lin Toshihiko Sasaki

(Kanazawa University)

The average stress—strain behavior of composite material with ellipsoidal inclusions is researched with the matrix method and equivalent inclusion method by the authors. The method used is based on theory of Mori and Tanaka. The general formulation of the composite material with spherical inclusions is shown. By using this method, the authors have discussed the average elastic behavior of the composite material. This composite material is composed of matrix of isotropic materials and spherical inclusion of isotropic materials. The volume of any inclusion is smaller than that of matrix, and the inclusions fit tightly against the matrix. The overall average Young's modulus, average shear elasticity and average Poisson's ration of composite material with spherical inclusions are shown, and it is proved that this composite material is a strict isotropic material. The way to increase the average elastic moduli of the composite material is found.

一、前 言

Eshelby 的等价介在物法^[1]是在无限大的物体中只有一个介在物存在的情况下分析其平均应力场分布的方法。当介在物大量地存在,并且相互作用的情况下,则有必要对 Eshelby 的等价介在物法进行修正。Mori-Tanaka 将 Eshelby 的等价介在物法进行了修正,使其能够适用于含有大量的一种椭圆形介在物的情况^[2]。Taya 和 Chou 进一步将 Mori-Tanaka 的方法扩展,提出了多种介在物共存情况下的模型^[3]。为了计算材料的弹性模量,Benveniste 使用了修正的 Mori-Tanaka 方法,提出了一种计算复合材料弹性模的联立方程组^[4]。Mori 和 Wakashima 提出了一种迭代的算法,计算了复合材料

的平均应力场、应变场以及特性参数^[5]。最近,林世强等就两相材料的弹塑性过程,利用等价介在物的方法和张量的方法,根据 Mori-Tanaka 的结论提出了一种新的解析方法,显示出所得到的结果不依赖于边界条件的变化而变化^[6]。(即:边界应力一定的条件下与边界应变一定的条件下所得到的结果相同)。但是,用张量的方法所显示的结果在研究材料的弹塑性行为中,应力或应变的演算需逐个分量地进行处理,给具体地应用带来不便。

因此,本论文的目的是为了便于实际应用,利用等价介在物的方法和矩阵的方法,依据 Mori-Tanaka 的结论,提出一个含有椭圆形介在物材料的应力—应变的关系式。并利用这个关系式讨论含有球形介在物材料的弹性行为,进一步得到材料整体的弹性模量。在本研究中所涉及的材料其基体和介在物均为各向同性材料,介在

①介在物—可泛指强化相,第二相,夹杂物,化合物等材料工程

物的体积相对于基体是非常地小并与基体紧密相联。

二、一般式的推导

我们将应力 $\bar{\sigma}$ 和应变 $\bar{\epsilon}$ 的各个分量用下述的矩阵来表示：

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

这里，我们考虑介在物 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots$ 处于无限大的物体 D 中时的应力和应变。这个介在物是无序分布，并且其形状和材质均相同，其体积分数为 f ，基体 M ($M = D - \Omega$) 的弹性常数矩阵为 \bar{C} ，介在物的弹性常数矩阵为 \bar{C}^* ，边界应力为 $\bar{\sigma}^0$ 。如果无介在物存在时，则材料中将产生均匀一致的应变 $\bar{\epsilon}^0$ ，即有 $\bar{\sigma}^0 = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}^P)$ 成立，这里， $\bar{\epsilon}^P$ 为塑性应变。如果有介在物存在时，则将会在基体与介在物之间产生干扰应变，这个干扰应变场设为 $\bar{\epsilon}_D$ 。 $\bar{\sigma}_m$ 和 $\bar{\sigma}_D$ 分别表示由于介在物的存在而导致的基体和介在物中的平均应力场。则当边界应力一定的条件下， $\bar{\sigma}_m$ 和 $\bar{\sigma}_D$ 必须满足下式：

$$(1-f) \bar{\sigma}_m + f \bar{\sigma}_D = 0 \quad (2)$$

Mori 和 Tanaka 的结果显示出了由于介在物的存在而导致的平均干扰应变场 $\bar{\epsilon}_D$ 在介在物的边界处趋于零^[2]，即 $\bar{\epsilon}_D$ 仅存在于介在物的内部。但是，所有的 $\bar{\epsilon}_D$ 在介在物的外部并不都为零，这是因为位移在无穷远处是自由的。因此，基体中的平均应力场可用下式来表示：

$$\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_D - \bar{\epsilon}_M^P) \quad (3)$$

这里， $\bar{\epsilon}_M^P$ 为基体内部的平均塑性应变场。介在物中的平均应力场为：

$$\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_D = \bar{C}^*(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_D + \bar{\epsilon}^r - \bar{\epsilon}_1^P) \quad (4)$$

这里， $\bar{\epsilon}^r$ 为介在物与基体的干扰应变场的差， $\bar{\epsilon}_1^P$ 为介在物中的平均塑性应变场。将式 (3) 代入式 (4) 得到：

$$\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_D = \bar{C}^*[\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{\epsilon}^r - \bar{\epsilon}_1^P] \quad (5)$$

这里， $\bar{\epsilon}_1^P = \bar{\epsilon}_1^P - \bar{\epsilon}_M^P$ 。

由式 (5) 可知塑性变形仅仅是由于介在物的塑性应变与基体的塑性应变的不一致而导致的。使用等价介在物的方法，则在介在物中的等价条件为：

$$\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_D = \bar{C}^*[\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{\epsilon}^r - \bar{\epsilon}_1^P] \quad (6)$$

$$= \bar{C}[\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{\epsilon}^r - (\bar{\epsilon}_1^P + \bar{\epsilon}^X)] \quad (7)$$

这里， $\bar{\epsilon}^X$ 为固有应变。局部的应变场 $\bar{\epsilon}^r$ 由下式给出^[7]：

$$\bar{\epsilon}^r_{ij}(\bar{X}) = - \int_{\Omega_k} C_{klmn} [\lambda \epsilon_{mn}^P(\bar{\xi}) + \epsilon_{mn}^*(\bar{\xi})] \frac{1}{2} [G_{ik,jl}(\bar{X} - \bar{\xi}) + G_{jk,li}(\bar{X} - \bar{\xi})] d\bar{\xi} \quad (8)$$

这里， $G_{ij}(\bar{X} - \bar{\xi})$ 为静的格林函数。当介在物为椭球形时，在 Ω_k 上对上式进行积分得到：

$$\bar{\epsilon}^r = \bar{S}(\lambda \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^*) \quad (9)$$

这里， \bar{S} 为 Eshelby 张量^[8]。Eshelby 张量 \bar{S} 不妨用如下的矩阵来表示：

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} + S_{2332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} + S_{3113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} + S_{1221} \end{bmatrix} \quad (10)$$

由于张量 \bar{S} 的分量 S_{ijk} 具有如下的性质： $S_{ijk} = S_{jik} = S_{jki}$ ^[7]，则式 (10) 可改写为：

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1212} \end{bmatrix} \quad (10a)$$

将式 (9) 代入式 (7) 得到：

$$\bar{\sigma}_D = \bar{\sigma}_m + \bar{C}(\bar{S} - \bar{I})(\lambda \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^*) \quad (11)$$

这里， \bar{I} 为单位矩阵。由式 (2) 和式 (11) 可以得到：

$$\bar{\sigma}_m = -f \bar{C}(\bar{S} - \bar{I})(\lambda \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^*) \quad (12)$$

将式 (9) 分别代入式 (6) 和式 (7) 可得：

$$\begin{aligned} \bar{C}^*[\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{S}(\lambda \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^*) - \bar{\epsilon}_1^P] \\ = \bar{C}[\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + (\bar{S} - \bar{I})(\lambda \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^*)] \end{aligned}$$

将式 (12) 代入上式得：

$$\begin{aligned} \lambda \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^* = \{\bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*)[\bar{S} - f(\bar{S} - \bar{I})]\}^{-1} \\ \cdot [(\bar{C} - \bar{C}^*)\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{C}^*\lambda \bar{\epsilon}^P] \end{aligned} \quad (13)$$

因此，基体与介在物中的平均应力场可由式 (12) 和式 (13) 分别得到：

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_M = \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}^0 - f \bar{C}(\bar{S} - \bar{I})[\bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*)[\bar{S} - f(\bar{S} - \bar{I})]]^{-1} \\ \cdot [(\bar{C} - \bar{C}^*)\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{C}^*\lambda \bar{\epsilon}^P] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_D = \bar{\sigma}^0 + (1-f) \bar{C}(\bar{S} - \bar{I})[\bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*)[\bar{S} - f(\bar{S} - \bar{I})]]^{-1} \\ \cdot [(\bar{C} - \bar{C}^*)\bar{C}^{-1}(\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{C}^*\lambda \bar{\epsilon}^P] \end{aligned} \quad (15)$$

不妨设基体与介在物的平均弹性应变分别为 $\bar{\epsilon}_M^e$ 和 $\bar{\epsilon}_1^e$ ，则由式 (3) 和式 (4) 得到：

$$\bar{\epsilon}_M = \bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_D - \bar{\epsilon}_M^P = \bar{C}^{-1} (\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) \quad (16)$$

$$\bar{\epsilon}_m^P = \bar{C}^{-1} (\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + \bar{\epsilon}^P - \Delta \bar{\epsilon}^P \quad (17)$$

不妨用 $\bar{\epsilon}$ 表示材料整体的应变，则材料整体的塑性应变 $\bar{\epsilon}^P$ 可由下式来表示：

$$\bar{\epsilon}^P \equiv (1-f) \bar{\epsilon}_M^P + f \bar{\epsilon}_1^P \quad (18)$$

因此整体的平均弹性应变 $\bar{\epsilon}^e$ 为：

$$\bar{\epsilon}^e \equiv \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^P = (1-f) \bar{\epsilon}_M^e + f \bar{\epsilon}_1^e \quad (19)$$

根据式 (9) 和式 (13)，并将式 (16) 和式 (17) 代入式 (19)，则可得材料整体的应力与应变的关系为：

$$\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^P = \bar{C}^{-1} (\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}_m) + f \bar{S} (\Delta \bar{\epsilon}^P + \bar{\epsilon}^P) - f \Delta \bar{\epsilon}^P$$

将式 (14) 和式 (13) 代入上式得：

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^P &= \{\bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*)\} [\bar{S} - f (\bar{S} - \bar{I})]^{-1} \{ [\bar{C} - (1-f) \\ &(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}] \bar{C}^{-1} \bar{\sigma}^0 + f (1-f) (\bar{C} - \bar{C}^*) (\bar{S} - \bar{I}) \Delta \bar{\epsilon}^P \} \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 即为材料整体的应力与应变的关系。

当在边界处的应变为一定的条件下，能够得到与式 (14)、(15)、(20) 同样的关系式 (详见附录 1)。

三、含有球形介在物材料的应力—应变关系式

当含有球形介在物的情况下，式 (10a) 中的分量可表示如下^[8,9]：

$$\begin{aligned} S_{1122} &= S_{2211}, S_{1133} = S_{3311}, S_{2233} = S_{3322}, \\ S_{1111} &= S_{2222} = S_{3333} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)} = P, \\ S_{1122} &= S_{2233} = S_{3311} = \frac{1-5\nu}{15(1-\nu)} = Q, \\ S_{1212} &= S_{2323} = S_{3131} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)} = \omega \end{aligned} \quad (21)$$

这里， ν 为基体材料的泊松比。

对于各向同性物质，设 ν 为其泊松比， E 为其杨氏模量， λ, μ 为其拉曼常数，则弹性常数矩阵 \bar{C} 如下：

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (22)$$

1. 当只有轴向应力作用的情况下

这时， $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0, \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$ ，则应力 $\bar{\sigma}$ 和应变 $\bar{\epsilon}$ 为：

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

由于矩阵 \bar{S} 和 \bar{C} 的右上角的部分元素及左下角的部分元素均为零，为了处理方便，不妨只考虑如下成分：

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} P & Q & Q \\ Q & P & Q \\ Q & Q & P \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

由上式可知，矩阵 \bar{S} 和 \bar{C} 的主对角线上的元素相等，其主对角线以外的元素也相等，所以，对于这样的特殊矩阵可如下 (详见附录 2)：

$$\bar{S}[\alpha, \beta], \quad \bar{C} = [3K, 2\mu] \quad (25)$$

这里， $\alpha = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}, \beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}, K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ 。由于 $0 < \nu < 0.5$ ，则 α 和 β 分别为： $\frac{1}{3} < \alpha < 1, \frac{2}{5} < \beta < \frac{8}{15}$ 。

将 λ, μ 表示基体的拉曼常数， λ^*, μ^* 表示介在行的拉曼常数，是基体的弹性常数 \bar{C} 和介在物的弹性常数 \bar{C}^* 为：

$$\bar{C} = [3K, 2\mu], \quad \bar{C}^* = [3K^*, 2\mu^*] \quad (26)$$

这里， $K = \lambda + 2\mu/3, K^* = \lambda^* + 2\mu^*/3$ 。利用这种特殊对称矩阵的性质 (详见附录 2)，将式 (25) 和式 (26) 分别代入式 (14)、式 (15) 和式 (20) 得到：

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_M &= \left[\frac{K-\alpha(K-K^*)}{A}, \frac{\mu-\beta(\mu-\mu^*)}{B} \right] \bar{\sigma}^0 - f \\ &\quad \left[\frac{3(\alpha-1)KK^*}{A}, \frac{2(\beta-1)\mu\mu^*}{B} \right] \Delta \bar{\epsilon}^P \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{\sigma}_1 = \left[\frac{K^*}{A}, \frac{\mu^*}{B} \right] \bar{\sigma}^0 + (1-f)$$

$$\left[\frac{3(\alpha-1)KK^*}{A}, \frac{2(\beta-1)\mu\mu^*}{B} \right] \setminus \varepsilon^P \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} - \varepsilon^P &= \left[\frac{K - (1-f)\alpha(K-K^*)}{3KA}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu - (1-f)\beta(\mu-\mu^*)}{2\mu B} \right] \bar{\sigma}^0 + f(1-f) \\ &\quad \left[\frac{(\alpha-1)(K-K^*)}{A}, \frac{(\beta-1)(\mu-\mu^*)}{B} \right] \setminus \varepsilon^P \quad (29) \end{aligned}$$

这里, $A \equiv K - [\alpha - f(\alpha - 1)](K - K^*)$, $B \equiv \mu - [\beta - f(\beta - 1)](\mu - \mu^*)$ 。式(27)、(28)和(29)即为材料整体在只有轴向应力作用下的一般式。

2. 在纯剪切应力状态下

这时, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, 则应力 $\bar{\sigma}$ 和应变 $\bar{\varepsilon}$ 为:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (30)$$

这了处理方便, 采用与 3.1 节同样的方法, 参量 $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\varepsilon}$ 、 \bar{S} 和 \bar{C} 不妨分别只取如下的成分:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \bar{\tau} &= \begin{bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_M &= \begin{bmatrix} \sigma_{M1} \\ \sigma_{M2} \\ \sigma_{M3} \\ \tau_{M23} \\ \tau_{M31} \\ \tau_{M12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma}_I = \begin{bmatrix} \sigma_{I1} \\ \sigma_{I2} \\ \sigma_{I3} \\ \tau_{I23} \\ \tau_{I31} \\ \tau_{I12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \tau_{23}^0 \\ \tau_{31}^0 \\ \tau_{12}^0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \varepsilon^P = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_1^P \\ \Delta \varepsilon_2^P \\ \Delta \varepsilon_3^P \\ \Delta \gamma_{23}^P \\ \Delta \gamma_{31}^P \\ \Delta \gamma_{12}^P \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^P \\ \varepsilon_2^P \\ \varepsilon_3^P \\ \gamma_{23}^P \\ \gamma_{31}^P \\ \gamma_{12}^P \end{bmatrix} \quad (37) \end{aligned}$$

则在一般的应力状态下, 其一般式为:

$$\bar{\sigma}_M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_1 + 2B_1 & A_1 - B_1 & A_1 - B_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 - B_1 & A_1 + 2B_1 & A_1 - B_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 - B_1 & A_1 - B_1 & A_1 + 2B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \tau_{23}^0 \\ \tau_{31}^0 \\ \tau_{12}^0 \end{bmatrix} - \frac{f}{3} \begin{bmatrix} 3A_2 + 4B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 + 4B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 + 4B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^P \\ \varepsilon_2^P \\ \varepsilon_3^P \\ \gamma_{23}^P \\ \gamma_{31}^P \\ \gamma_{12}^P \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\bar{\sigma}_I = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_3 + 2B_3 & A_3 - B_3 & A_3 - B_3 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 - B_3 & A_3 + 2B_3 & A_3 - B_3 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 - B_3 & A_3 - B_3 & A_3 + 2B_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \tau_{23}^0 \\ \tau_{31}^0 \\ \tau_{12}^0 \end{bmatrix} + \frac{1-f}{3} \begin{bmatrix} 3A_2 + 4B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 + 4B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 - 2B_2 & 3A_2 + 4B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^P \\ \varepsilon_2^P \\ \varepsilon_3^P \\ \gamma_{23}^P \\ \gamma_{31}^P \\ \gamma_{12}^P \end{bmatrix} \quad (39)$$

则 \bar{S} 和 \bar{C} 可简化表示为:

$$\bar{S} = \beta \bar{I}, \quad \bar{C} = \mu \bar{I} \quad (32)$$

这里, $\beta = \omega$, \bar{I} 为单位矩阵。

将 μ 表示基体的剪切模量, μ^* 表示介在物的剪切模量, 则基体的弹性常数 \bar{C} 和介在物的弹性常数 \bar{C}^* 为:

$$\bar{C} = \mu \bar{I}, \quad \bar{C}^* = \mu^* \bar{I} \quad (33)$$

将式(32)、(33)分别代入式(14)、(15)和(20)得到:

$$\bar{\sigma}_M = \frac{\mu - \beta(\mu - \mu^*)}{B} \bar{\sigma}^0 - f \frac{(\beta - 1)\mu\mu^*}{B} \setminus \varepsilon^P \quad (34)$$

$$\bar{\sigma}_I = \frac{\mu^*}{B} \bar{\sigma}^0 + (1-f) \frac{(\beta - 1)\mu\mu^*}{B} \setminus \varepsilon^P \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} - \gamma^P &= \frac{\mu - (1-f)\beta(\mu - \mu^*)}{\mu B} \bar{\tau}^0 + f(1-f) \\ &\quad \frac{(\beta - 1)(\mu - \mu^*)}{B} \setminus \varepsilon^P \quad (36) \end{aligned}$$

这里, $B \equiv \mu - [\beta - f(\beta - 1)](\mu - \mu^*)$ 。式(34)、(35)和(36)即材料整体在纯剪切应力状态下的一般式。

3. 一般的应力状态下

不妨设 $\bar{\sigma}_M$ 表示基体的平均应力场, $\bar{\sigma}_I$ 表示介在物的平均应力场, $\bar{\sigma}^0$ 表示材料整体的平均应力场, $\setminus \varepsilon^P$ 表示介在物和基体的平均塑性应变场的差, $\bar{\varepsilon}$ 表示材料整体的平均应变场, ε^P 表示材料整体的平均塑性应变场, 即:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon^* \\ \varepsilon_3 - \varepsilon^* \\ \gamma_{23} - \gamma^* \\ \gamma_{31} - \gamma^* \\ \gamma_{12} - \gamma^* \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_4 + 2B_4 & A_4 - B_4 & A_4 - B_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 - B_4 & A_4 + 2B_4 & A_4 - B_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 - B_4 & A_4 - B_4 & A_4 + 2B_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6B_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^* \\ \sigma^* \\ \sigma^* \\ \tau^* \\ \tau^* \\ \tau^* \end{bmatrix} + \frac{f(1-f)}{3} \begin{bmatrix} A_5 + 2B_5 & A_5 - B_5 & A_5 - B_5 & 0 & 0 & 0 \\ A_5 - B_5 & A_5 + 2B_5 & A_5 - B_5 & 0 & 0 & 0 \\ A_5 - B_5 & A_5 - B_5 & A_5 + 2B_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3B_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3B_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^* \\ \sigma^* \\ \sigma^* \\ \tau^* \\ \tau^* \\ \tau^* \end{bmatrix} \quad (40)$$

这里, $A_1 = \frac{K - \alpha (K - K^*)}{A}$ 、 $B_1 = \frac{\mu - \beta (\mu - \mu^*)}{B}$ 、

$$A_3 = \frac{K^*}{A}、B_3 = \frac{\mu^*}{B}、A_2 = \frac{(\alpha - 1) K K^*}{A}、$$

$$B_2 = \frac{(\beta - 1) \mu \mu^*}{B}、A_4 = \frac{K - (1 - f) \alpha (K - K^*)}{3KA}、$$

$$B_4 = \frac{\mu - (1 - f) \beta (\mu - \mu^*)}{2\mu B}、$$

$$A_5 = \frac{(\alpha - 1) (K - K^*)}{A}、B_5 = \frac{(\beta - 1) (\mu - \mu^*)}{B}$$

四、含有球形介在物材料的弹性模量

设材料整体的弹性常数为 \bar{C}^0 , 则在弹性变形条件下, 有下式成立:

$$\bar{\sigma}^0 = \bar{C}^0 \bar{\varepsilon} \quad (41)$$

这里, $\bar{\sigma}^0$, $\bar{\varepsilon}$ 分别为材料整体的应力和应变。

1. 当只有轴向应力作用的情况下

基体和介在物均处于弹性状态的条件下, 即: $\lambda \bar{\varepsilon}^* = 0$ 、 $\bar{\varepsilon}^* = 0$, 则式 (29) 为:

$$\bar{\sigma}^0 = \left[\frac{3KA}{K - (1-f) \alpha (K - K^*)}, \frac{2\mu B}{\mu - (1-f) \beta (\mu - \mu^*)} \right] \bar{\varepsilon} \quad (42)$$

上式显示出 $\bar{\sigma}^0$ 与 $\bar{\varepsilon}$ 成线性关系。即: 基体和介在物均处在弹性状态时, 材料整体也处于弹性状态。

设材料整体的拉曼常数为 μ^0 和 λ^0 , 其弹性模量为 $\bar{C}^0 = [3K^0, 2\mu^0]$, 则由式 (42) 可得:

$$C^0 = [3K^0, 2\mu^0] = \left[\frac{3KA}{K - (1-f) \alpha (K - K^*)}, \frac{2\mu B}{\mu - (1-f) \beta (\mu - \mu^*)} \right] \quad (43)$$

$$K^0 = \frac{KA}{K - (1-f) \alpha (K - K^*)} \quad (44)$$

$$\mu^0 = \frac{\mu B}{\mu - (1-f) \beta (\mu - \mu^*)} \quad (45)$$

2. 在纯剪切应力状态下

基体和介在物均处于弹性状态下, $\lambda \bar{\gamma}^* = 0$ 、 $\bar{\gamma}^* = 0$, 则由式 (36) 得:

$$\bar{\tau}^0 = \frac{\mu B}{\mu - (1-f) \beta (\mu - \mu^*)} \bar{\gamma} \quad (46)$$

上式显示出 $\bar{\tau}^0$ 与 $\bar{\gamma}$ 成比例。即: 基体和介在物均于弹性状态时, 材料整体也处于弹性状态。

设材料整体的剪切模量为 G^0 , 材料整体的弹性模量即为 $\bar{C}^0 = G^0 \bar{\tau}$, 则由式 (46) 可得:

$$G^0 = \frac{\mu B}{\mu - (1-f) \beta (\mu - \mu^*)} = \mu^0 \quad (47)$$

材料工程

3. 一般的应力状态下

如上述, 利用式 (40), 材料整体的弹性常数 \bar{C}^0 可得:

$$\bar{C}^0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_4 + 2B_4 & A_4 - B_4 & A_4 - B_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 - B_4 & A_4 + 2B_4 & A_4 - B_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 - B_4 & A_4 - B_4 & A_4 + 2B_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6B_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6B_4 \end{bmatrix} \quad (48)$$

比较式 (48) 和式 (22) 得到:

$$E^0 = \frac{9K\mu AB}{3 [\mu - (1-f) (\mu - \mu^*) \beta] KA + [K - (1-f) (K - K^*) \alpha] \mu B} \quad (49)$$

$$\nu^0 = \frac{3 [\mu - (1-f) (\mu - \mu^*) \beta] KA - 2 [K - (1-f) (K - K^*) \alpha] \mu B}{6 [\mu - (1-f) (\mu - \mu^*) \beta] KA + 2 [K - (1-f) (K - K^*) \alpha] \mu B} \quad (50)$$

由此即可得材料整体的杨氏模量 E^0 和泊松比 ν^0 。

利用 λ , μ , K 之间的关系可得到 λ^0 为:

$$\lambda^0 = K^0 - \frac{2}{3} \mu^0 = \lambda - \frac{f}{3} \left\{ \frac{(3\lambda + 2\mu) [3 (\lambda - \lambda^*) + 2 (\mu - \mu^*)]}{3\lambda + 2\mu - (1-f) \alpha [3 (\lambda - \lambda^*) + 2 (\mu - \mu^*)]} - \frac{2\mu (\mu - \mu^*)}{\mu - (1-f) \beta (\mu - \mu^*)} \right\} \quad (51)$$

则这个材料整体的弹性模量 \bar{C}^0 为:

$$\bar{C}^0 = \begin{bmatrix} \lambda^0 + 2\mu^0 & \lambda^0 & \lambda^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^0 & \lambda^0 + 2\mu^0 & \lambda^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^0 & \lambda^0 & \lambda^0 + 2\mu^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

五、讨 论

由式 (44) 和式 (45) 可得:

$$K^0 = \left[1 - \frac{1}{\alpha + \frac{(1-\alpha) K + \alpha K^*}{f (K - K^*)}} \right] K \quad (44a)$$

$$\mu^0 = \left[1 - \frac{1}{\beta + \frac{(1-\beta) \mu + \beta \mu^*}{f (\mu - \mu^*)}} \right] \mu \quad (45a)$$

将式 (44a) 和式 (45a) 进行变换可得:

$$K^* = \left[1 + \frac{K^0 - K}{f K - (1-f) \alpha (K^0 - K)} \right] K \quad (44b)$$

$$\mu^* = \left[1 + \frac{\mu^0 - \mu}{f \mu - (1-f) \beta (\mu^0 - \mu)} \right] \mu \quad (45b)$$

因此, 利用式 (44a) 和式 (45a) 可由基体和介在物的

弹性常数推测材料整体的弹性模量；另一方面，利用式（44b）和式（45b）可由材料整体和基体的弹性常数推测介在物的弹性模量。

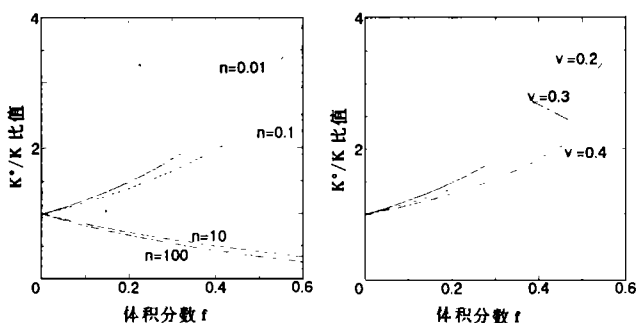
式（44a）指出当 $f=0$ 时， $K^0=K$ ； $f=1$ 时， $K^0=K^*$ ；这是与实际相吻合的。另一方面，由于 $K>0$ 和 $K^*>0$ ，则式（44a）还指出当 $K^*>0$ 时， K^0 随着 f 的增加而增加；当 $K^*<K$ 时， K^0 随 f 的增加而减少。

设 $\frac{K}{K^*}$ 为 n 则式（44a）变为：

$$\frac{K^0}{K} = 1 - \frac{f(n-1)}{n - (1-f)\alpha(n-1)} \quad (44c)$$

图 1a 示出在基体的泊松比 $\nu=0.2$ 条件下， $\frac{K^0}{K}$ 与介在物的体积分数 f 的关系曲线。由图 1 可看出当 $n<1$ 时， $\frac{K^0}{K}$ 随 f 增加而增加，并且 n 值越小 $\frac{K^0}{K}$ 随 f 的增加幅度越大。另外，当 $n>1$ 时， $\frac{K^0}{K}$ 随 f 的增加而减少，并且 n 值越大 $\frac{K^0}{K}$ 随 f 的减少幅度越大。

图 1b 示出在 $n=0.01$ 的条件下， $\frac{K^0}{K}$ 与介在物的体积分数 f 的关系曲线。由图 2 可看出 $\frac{K^0}{K}$ 伴随 f 的增加而增加，基体的泊松比 ν 越大， $\frac{K^0}{K}$ 随 f 的增加幅度越小。



(a) $\nu=0.2$ (b) $n=0.01$

图 1 含有球形介在物材料的 K^0/K 与介在物的体积分数 f 的关系

由式（49）可得：

$$E^0 = \frac{9}{\frac{3}{\mu^0} + \frac{1}{K^0}} = \frac{9K^0\mu^0}{3K^0 + \mu^0} \quad (49a)$$

由上述可知 $m<1$ 和 $n<1$ 时，材料整体的杨氏模量 E^0 随 f 的增加而增加， $m>1$ 并且 $n>1$ 时， E^0 随 f 的增加而减少。

因此，为了提高这种材料的弹性模量，在选择 $m<1$ 以及 $n<1$ 那样的介在物的同时，应尽可能地提高介在物的体积分数 f 。

将式（49）和式（50）与式（47）比较可得：

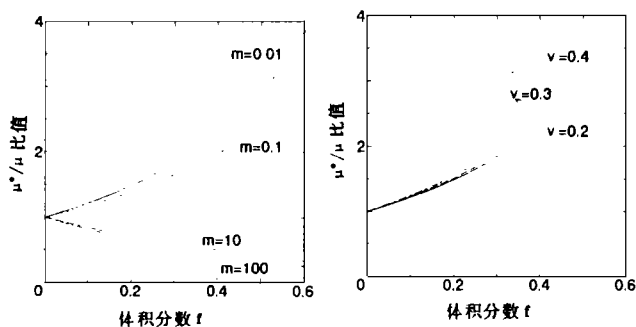
式（45a）指出当 $f=0$ 时， $\mu^0=\mu$ ； $f=1$ 时， $\mu^0=\mu^*$ ；这也是与实际相吻合的。一方面，由于 $\mu^*>0$ 和 $\mu^*>0$ ，则式（45a）还表示出当 $\mu^*>\mu$ 时， μ^0 随着 f 的增加而增加。当 $\mu^*<\mu$ 时， μ^0 随着 f 的增加而减少。

设 $\frac{\mu}{\mu^*}$ 为 m 则式（45a）变为：

$$\frac{\mu^0}{\mu} = 1 - \frac{f(m-1)}{m - (1-f)\beta(m-1)} \quad (45c)$$

图 2a 示出在基体的泊松比 $\nu=0.2$ 条件下， $\frac{\mu^0}{\mu}$ 与介在物的体积分数 f 的关系曲线。由图 2a 可看出当 $m<1$ 时， $\frac{\mu^0}{\mu}$ 随 f 的增加而增加，并且 m 值越小 $\frac{\mu^0}{\mu}$ 随 f 的增加幅度越大。又，当 $m>1$ 时， $\frac{\mu^0}{\mu}$ 随 f 的增加而减少，并且 m 值越大 $\frac{\mu^0}{\mu}$ 随 f 的减少幅度越大。

图 2b 显示出在 $m=0.01$ 的条件下， $\frac{\mu^0}{\mu}$ 与介在物的体积分数 f 的关系曲线。由图 2b 可看出 $\frac{\mu^0}{\mu}$ 伴随 f 的增加而增加，基体的泊松比 ν 越大， $\frac{\mu^0}{\mu}$ 随 f 的增加幅度越大。



(a) $\nu=0.2$ (b) $m=0.01$

图 2 含有球形介在物材料的 μ^0/μ 与介在物的体积分数 f 的关系

$$\frac{E^0}{2(1+\nu)} = \frac{\mu B}{\mu - (1-f)(\mu - \mu^*)\beta} = G^0 \quad (53)$$

上式满足 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 这一关系^[10]，这里 μ ， ν 和 E 分别为材料的剪切模量、泊松比和杨氏模量。材料整体表示出各向同性物质的性质。

六、结 论

1. 使用本研究所得到的结果在应力或应变的演算中无需逐个分量地进行处理，各种参量能够明确地表示，给实际的应用带来极大的方便。

2. 所得到的材料整体的弹性模量，其极限情况与实

际情况是相吻合的。并且还显示出含有球形介在物材料具有各向同性物质的性质。

3. 为了提高这种材料的弹性模量, 在选择 $K^* > K$ 或 $\mu^* > \mu$ 介在物的同时, 应尽可能地提高介在物的体积分数 f 。

附录 1

当边界处的应变为一定的条件下, 设这个应变为 $\bar{\epsilon}^0$ 。如果无介在物存在时, 则材料中将产生均匀一致的应变 $\bar{\epsilon}^0$ 。如果有介在物存在时, 则将会在基体与介在物之间产生干扰应变。不妨设 $\bar{\epsilon}_m$ 和 $\bar{\epsilon}_0$ 分别表示由于介在物的存在而导致的基体和介在物中的平均应变场。则其应满足下述关系式:

$$(1-f) \bar{\epsilon}_m + f \bar{\epsilon}_0 = 0 \quad (A1)$$

令 $\bar{\sigma}_m$ 和 $\bar{\sigma}_1$ 分别表示基体和介在物中的平均应力场, 则有下式成立:

$$\text{基体中: } \bar{\sigma}_m = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_m^p) \quad (A2)$$

$$\text{介在物中: } \bar{\sigma}_1 = C^*(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_1^p) \quad (A3)$$

这里, $\bar{\epsilon}_m^p$ 为基体中的平均塑性应变, $\bar{\epsilon}_1^p$ 为介在物中的平均塑性应变。则式 (A3) 可改写为:

$$\bar{\sigma}_1 = C^* \{ (\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_m^p) + (\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_m) - \Delta \bar{\epsilon}^p \} \quad (A3a)$$

这里, $\Delta \bar{\epsilon}^p \equiv \bar{\epsilon}_1^p - \bar{\epsilon}_m^p$ 。使用等价介在物的方法, 则在介在物中的等价条件为:

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{C}^* [(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_m^p) + (\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_m) - \Delta \bar{\epsilon}^p] \quad (A4a)$$

$$= \bar{C} [(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_m^p) + (\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_m) - (\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*)] \quad (A4b)$$

这里, $\bar{\epsilon}^*$ 为固有应变。由于 $(\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_m)$ 表示了介在物与基体的干扰应变场的差, 所以与式 (4) 中的 $\bar{\epsilon}'$ 相同。因此, 将 $(\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_m)$ 替代式 (9) 中的 $\bar{\epsilon}'$ 得:

$$(\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_m) = \bar{S}(\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*) \quad (A5)$$

将式 (A1) 代入式 (A5) 得:

$$\bar{\epsilon}_m = -f \bar{S}(\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*) \quad (A6)$$

将式 (A5) 代入式 (A4b) 得:

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{C} [(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_m^p) + (\bar{S} - \bar{I})(\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*)] \quad (A7)$$

利用式 (A2) 和式 (A7) 可得整体的应力 $\bar{\sigma}$ 为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (1-f) \bar{\sigma}_m + f \bar{\sigma}_1 = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_m^p) \\ &+ f \bar{C}(\bar{S} - \bar{I})(\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*) \end{aligned}$$

将式 (A6) 代入上式得:

$$\bar{\sigma} = \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}_m^p) - f \bar{C}(\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*) \quad (A8)$$

将式 (A5) 和式 (A6) 分别代入式 (A4a) 和式 (A4b) 得到:

材料工程

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{\epsilon}^p + \bar{\epsilon}^*) &= [\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} \\ &[(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{\epsilon}^0 - \bar{C} \bar{\epsilon}_m^p + \bar{C}^* \bar{\epsilon}_1^p] \end{aligned} \quad (A9)$$

将式 (A9) 代入式 (A6) 和式 (A5) 分别得到:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_m &= -f \bar{S}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} \\ &[(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{\epsilon}^0 - \bar{C} \bar{\epsilon}_m^p + \bar{C}^* \bar{\epsilon}_1^p] \end{aligned} \quad (A6a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_0 &= (1-f) \bar{S}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} \\ &[(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{\epsilon}^0 - \bar{C} \bar{\epsilon}_m^p + \bar{C}^* \bar{\epsilon}_1^p] \end{aligned} \quad (A5a)$$

将式 (A9) 代入式 (A8) 得到整体的应力场为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{C}(\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}_m^p) - f \bar{C}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} \\ &[(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{\epsilon}^0 - \bar{C} \bar{\epsilon}_m^p + \bar{C}^* \bar{\epsilon}_1^p] \end{aligned} \quad (A8a)$$

由于 $\bar{\epsilon}^p \equiv \bar{\epsilon}_1^p - \bar{\epsilon}_m^p$, $\bar{\epsilon}^p \equiv (1-f) \bar{\epsilon}_m^p + f \bar{\epsilon}_1^p$, 则 $\bar{\epsilon}_m^p = \bar{\epsilon}^p - f \Delta \bar{\epsilon}^p$, $\bar{\epsilon}_1^p = \bar{\epsilon}^p + (1-f) \Delta \bar{\epsilon}^p$ 。因此, 将其代入式 (A8a) 得到:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \{ \bar{C} - f \bar{C}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} (\bar{C} - \bar{C}^*) \} \\ &(\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}^p) + f (1-f) \bar{C}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} (\bar{C} - \bar{C}^*) \\ &(\bar{I} - \bar{S}) \Delta \bar{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (A10)$$

将上式进行变换得:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}^p &= \{ \bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*) [\bar{S} - f (\bar{S} - \bar{I})] \}^{-1} \{ \bar{C} - (1-f) \\ &(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S} \} \bar{C}^{-1} \bar{\sigma} + f (1-f) (\bar{C} - \bar{C}^*) (\bar{S} - \bar{I}) \Delta \bar{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (A10a)$$

比较式 (A10a) 和式 (20) 可知, 给定 $\bar{\epsilon}^0$ 时, 使用式 (A10) 确定 $\bar{\sigma}$ 与给定 $\bar{\sigma}^0$ 时, 使用式 (20) 确定 $\bar{\epsilon}$ 是同样的。另一方面, 将式 (A6)、(A9)、(A10) 等分别代入式 (A2) 和 (A7) 经过复杂的变换可得:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m &= \bar{\sigma} - f \bar{C}(\bar{S} - \bar{I}) \{ \bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*) [\bar{S} - f (\bar{S} - \bar{I})] \}^{-1} \\ &[(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{C}^{-1} \bar{\sigma} + \bar{C}^* \Delta \bar{\epsilon}^p] \end{aligned} \quad (A11a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0 &= \bar{\sigma} + (1-f) \bar{C}(\bar{S} - \bar{I}) \{ \bar{C} - (\bar{C} - \bar{C}^*) [\bar{S} - f (\bar{S} - \bar{I})] \}^{-1} \\ &[(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{C}^{-1} \bar{\sigma} + \bar{C}^* \Delta \bar{\epsilon}^p] \end{aligned} \quad (A11b)$$

将式 (A11a) 和式 (A11b) 分别与式 (14) 和式 (15) 比较可知其是一致的。

因此, 不论边界应力一定, 还是边界应变一定, 使用本方法所得到的结果是相同的。

所以, 基体和介在物中的平均应变场为:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_m &= \bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_m = \bar{\epsilon}^0 - (f \bar{S}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} \\ &\{ (\bar{C} - \bar{C}^*) (\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}^p) + [f \bar{C} + (1-f) \bar{C}^*] \Delta \bar{\epsilon}^p \} \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 &= \bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}_0 = \bar{\epsilon}^0 + (1-f) (f \bar{S}[\bar{C} - (1-f)(\bar{C} - \bar{C}^*) \bar{S}]^{-1} \\ &\{ (\bar{C} - \bar{C}^*) (\bar{\epsilon}^0 - \bar{\epsilon}^p) + [f \bar{C} + (1-f) \bar{C}^*] \Delta \bar{\epsilon}^p \} \end{aligned} \quad (A13)$$

附录 2

对于主对角线上的元素相等, 其主对角线以外的元素也相等的特殊对称矩阵 \bar{A} , 即如下所示:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} = \frac{a+2b}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a-b}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (B1)$$

为了将式子简化, 令 $\alpha = a + 2b$, $\beta = a - b$, 则式 (B1) 可如下表示:

$$\bar{A} = [\alpha, \beta] = \alpha \bar{I}_1 + \beta \bar{I}_2 \quad (B2)$$

$$\text{这里, } \bar{I}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{I}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{。对}$$

于矩阵 \bar{I}_1 和 \bar{I}_2 可以证明有如下的性质成立:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}, \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 = \bar{I}_2 \times \bar{I}_1 = 0, \bar{I}_1 \times \bar{I}_1 = \bar{I}_1, \bar{I}_2 \times \bar{I}_2 = \bar{I}_2 \quad (B3)$$

这里, \bar{I} 为单位矩阵。利用式 (B3), 可得如下的性质:

$$\begin{aligned} [1, 1] &= \bar{I}, [a_1, \beta_1] \pm [a_2, \beta_2] = [a_1 \pm a_2, \beta_1 \pm \beta_2], \\ [a_1, \beta_1] \times [a_2, \beta_2] &= [a_1 \times a_2, \beta_1 \times \beta_2], [a, \beta]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (B4)$$

参考文献

1. Eshelby, J. D., Elastic Inclusion and Inhomogeneities, Progress in Solid Mechanics, 2 (1961), 89~140, North-Holland, Amsterdam

* * * * *

(上接第 47 页)

经研制成功。

具有高硬度、高电阻率和优良介电光学性能的非晶体氢碳膜 (a-C:H) 现在被称为类金刚石碳或 DLC。对于许多机械和摩擦学应用上是构件表面性能的理想组合, 具有高硬度和低摩擦系数。成为近年来大力开发的涂层。

可以采用下列几种技术生产 DLC 薄膜: 碳离子离子束沉积 (IBD) 法、带或不带强离子流的碳溅射沉积 (物理汽相沉积, PVD) 法、在碳氢气体中从射频等离子体持续沉积到负偏压的底层上 (等离子加化学气相沉积, PACVD) 法。由于制造规程不同, 各种金刚石薄膜和类似金刚石碳薄膜的性能变化很大, 金刚石薄膜硬度可达到 3000~12000HV, 通常具有粗糙的小平面表面。类似金刚石碳膜硬度较低 (900~300HV), 但表面光滑。

DLC 涂层的应用对象十分广泛, 从小型零件到大型锻模和铸模。DLC 膜的应用快速扩大, 包括装饰技术; 低摩擦涂层; 机加工铝合金和铜合金的高速刀具涂层; 混合带中的陶瓷衬垫; 纺织机械中的导板; 冲压膜; 密封件和切削带等等。DLC 基涂层目前成功地应用于冷挤压模具, 无需预先加以 MoS₂ 涂层, 涂敷 DLC 的冷挤压模具一次可以挤压 4000 个胚件而不发生磨损和其它失效迹象。在医学用锯上, DLC 膜也是理想的涂层。镀有 DLC 膜的锯子, 其寿命是普通锯子的 2 倍, 而且摩擦生热小, 切削迅速, 不损害骨头组织。DLC 涂层也可以

2. Mori, T. et al., Acta Metall., 21 (1973), 571~574
3. Taya, M. et al., Int. J. Solids Struct., 17 (1981), 553~563
4. Benveniste, Y., A New Approach to the Application of Mori-Tanaka's Theory in Composite materials. Mech. Mater., 6 (1987), 147~157
5. Mori, T. et al., Successive Iteration Method in the Evaluation of Average fields in Elastically Inhomogeneous Materials. In Micromechanics and Inhomogeneity, The Toshio Mura Anniversary Volume (Edited by G. J. Weng, M. Taya and H. Abe), (1989), 269~282. Springer, New York
6. S. C. Lin et al., Int. J. Solids Structures Vol. 29, No. 14/15 (1992), 1859~1872, Printed in Great Britain
7. Mura, T., Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff, The Hague (1982), 150~158, 66~67
8. Eshelby, J. D., Proc. R. Soc., Long. A241 (1957), 376~396.
9. 村外志人, 森勉, 《マイクロメカニクス = 転位と介在物》, (1976), 25, 1, 培风馆
10. 徐芝纶, 《弹性力学简明教程》, (1980), 23, 高等教育出版社

应用于人工关节植入件, 如脊骨和膝盖骨植入件等。DLC 加 5%Ti 复合涂层在机加工不锈钢中需用低进给量。低速切削的刀具上, 有重要的应用。涂有这种涂层的钻头寿命提高了四倍。

在软涂层中 MoS₂ 涂层在宇航和真空系统中主要是提供自润滑。一般采用频磁控溅射技术沉积 MoS₂, 但在一般的情况下, 其镀膜密度较低。为了获得高密度镀膜, 可以从工艺上加以改进, 如采用不平衡磁控溅射 (CFUBMS) 技术可获得致密的 MoS₂ 膜。这种 MoS₂ 固体润滑剂在机加工中得到广泛应用。

在机加工高强度航空铝合金、钛合金和精密金属中过去很少采用硬质涂层。目前英国 Teer 涂层公司, 瑞士 Vilab 公司和法国 Vallorbe 公司正在大力研究综合涂层和切削刀具系统。据说, 加工这类材料可以大大提高生产率, 刀具寿命提高 20 倍。Teer 涂层公司采用 CFUBMS 系统可以沉积高密度和高粘接强度的 MoS₂。Vilab 公司探索这类涂层的可能应用中发现, 涂有 MoS₂ 复合涂层非常适用于铝合金的机械加工上, 其工艺技术已获得了专利权。

在机加工和成形工艺中为了提高生产率目前一条较好的途径是采用适当的涂层 (或镀层) 材料。现有涂层材料及其组合, 新型涂层材料及其制备技术的研究, 具有广泛发展的潜力, 前景可观。

(傅孙靖)