# 磁粉退磁场和退磁因子的理论计算

# Theoretical Computation of Demagnetic Field and Demagnetic Factor of Magnetic Powder

南方航空动力机械公司　徐忠民

Xu Zhongmin（Nanfang Aeroengine Co）

［摘要］　根据建立的物理模型和数学模型，对单个球形磁粉在漏磁场中的退磁场和退磁因子作了详细的理论计算，从而为磁粉的受力分析等研究提供了一定的理论基础。

**关键词**：磁粉　漏磁场　退磁场　退磁因子　理论计算

[**Abstract**]　According to the setted physical model and the mathematical model, theoretical computation is made in detail about the single spherical magnetic powder's demagnetic field and demagnetic factor in the magnetic leakage field. These provide a certain theoretical base for research of analysis strength-bearing of magnetic powder and so on.

**Keywords**: magnetic powder　magnetic leakage field　demagnetic field　demagnetic factor　theoretical computation

## 1　物理模型

设一球形磁粉颗粒半径为 $R_0$、所在处的漏磁场为 $\vec{H}_0$、磁化矢量为 $\vec{M}$、磁化率为 $\chi$、相对磁导率为 $\mu_r$、产生的退磁场为 $\vec{H}$、退磁因子为 $N_D$。

由于磁粉颗粒很小，故可认为整个磁粉颗粒内部的磁化是均匀的，即 $\vec{M}$ 在颗粒内部是恒定的，且 $\vec{M}=\chi(\vec{H}_0+\vec{H})$。

考虑磁粉周围的有限区域，可以认为磁粉内部和外部是两个均匀媒质区域。外面是空气（或是载液），没有磁荷存在；在磁粉内部，由于磁化均匀、$\vec{M}$ 恒定，故磁粉内部的磁荷亦为 0（$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}=0$）。因此，磁荷只分布在磁粉小球表面。

## 2　数学模型与求解

根据上面的物理模型，单颗磁粉周围磁场的计算就是要求解磁化矢量为 $\vec{M}$、磁荷只分布在表面上的磁粉小球产生的磁场，即退磁场。为此，先要求解磁粉内外两区域的磁势。

设磁粉外面的磁势为 $\varphi_1$，磁粉内部的磁势为 $\varphi_2$，$\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 均满足拉普拉斯方程[1]，即：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1=0\\ \nabla^2\varphi_2=0\end{cases}\qquad(1)$$

根据电磁学理论的结果，磁粉外面的磁势不随距离增大而减小，即 $\varphi_1$ 的展开式只含 R 负幂次项；而磁粉内部的磁势当 $R=0$（即磁粉中心）时是有限的，即 $\varphi_2$ 的展开式只含 R 正幂次项，故有[2]：

$$\begin{cases}\varphi_1=\sum\limits_n \dfrac{b_n}{R^{n-1}}P_n(\cos\theta)\\ \varphi_2=\sum\limits_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\end{cases}\qquad(2)$$

$a_n$、$b_n$ 为待定系数（由边界条件确定）；$P_n(\cos\theta)$ 为勒让德函数。

磁粉表面的边界条件为：当 $\vec{R}=R_0$ 时

$$\begin{cases}B_{1R}=B_{2R}\ （磁感应强度法向分量连续）\\ H_{1\theta}=H_{2\theta}\ （或\ \varphi_1=\varphi_2）（磁场强度切向分量连续）\end{cases}\qquad(3)$$

而 $B_{1R}=\mu_0H_{1R}=-\mu_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial R}\quad(\vec{H}=-\nabla\varphi)$

$$=\mu_0\sum_n\frac{(n+1)\,b_n}{R^{n+2}}P_n(\cos\theta)$$

$$B_{2R}=\mu_0(H_{2R}+M_R)$$

$$=-\mu_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}+\mu_0M\cos\theta$$

$$=-\mu_0\sum_n na_nR^{n-1}P_n(\cos\theta)+\mu_0MP_1(\cos\theta)$$

由（3）式边界条件得：

$$\begin{cases}\sum_n \frac{(n+1)\ b_n}{R_0^{n+2}}P_n\ (\cos\theta)=-\sum_n na_nR_0^{n-1}P_n\ (\cos\theta)\\ \qquad\qquad +MP_1\ (\cos\theta) \\ \sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n\ (\cos\theta)=\sum_n a_nR_0^nP_n\ (\cos\theta)\end{cases} \tag{4}$$

比较方程（4）两边 $P_n$（$\cos\theta$）的系数得：

$$\begin{cases}\frac{2b_1}{R_0^3}=-a_1+M\\ \frac{b_1}{R_0^2}=a_1R_0\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\frac{(n+1)\ b_n}{R_0^{n+2}}=-na_nR_0^{n-1}\\ \frac{b_n}{R_0^{n+1}}=a_nR_0^n\end{cases}\quad (n\neq 1) \tag{6}$$

求解方程组（5）和（6）得：

$$\begin{cases}a_1=\frac{1}{3}M,\ b_1=\frac{1}{3}MR_0^3\\ a_n=b_n=0\quad (n\neq 1)\end{cases}$$

从而有：

$$\begin{cases}\varphi_1=\frac{1}{3}MR_0^3\frac{\cos\theta}{R^2}\\ \varphi_2=\frac{1}{3}MR\cos\theta\end{cases}\quad (P_1\ (\cos\theta)\ =\cos\theta) \tag{7}$$

## 3 磁粉退磁场的计算

根据上面的计算，磁化矢量为 $\vec{M}$ 的磁粉小球，其表面上的磁荷在该磁粉内部产生的磁场为[1]：

$$\begin{aligned}\vec{H}&=-\nabla\varphi_2\\ &=-\nabla\ (\frac{1}{3}MR\cos\theta)\\ &=-\frac{1}{3}\nabla\ (\vec{M}\cdot\vec{R})\\ &=-\frac{1}{3}\nabla\ (M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\\ &=-\frac{1}{3}\nabla\ (M_xX+M_yY+M_zZ)\\ &=-\frac{1}{3}\ (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k})\ (M_xX+M_yY+M_zZ)\\ &=-\frac{1}{3}\ (M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k})\\ &=-\frac{1}{3}\vec{M}\end{aligned} \tag{8}$$

将（8）式代入方程

$\vec{M}=x\ (\vec{H}_0+\vec{H})$，得

$$\vec{M}=x\ (\vec{H}_0-\frac{1}{3}\vec{M}) \tag{9}$$

整理（9）式，写为

$$\vec{M}=\frac{3x}{3+x}\vec{H}_0 \tag{9'}$$

将（9）'式代入（8）式，则有

$$\begin{aligned}\vec{H}&=-\frac{x}{3+x}\vec{H}_0\\ &=-\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2}\vec{H}_0\qquad (1+x=\mu_r)\end{aligned}$$

式中“－”号表示 $\vec{H}$ 与 $\vec{H}_0$ 方向相反，即磁粉小球表面上的磁荷在其内部产生的退磁场。

## 4 磁粉退磁因子的计算

根据上面的计算，可以得出磁粉小球内部的有效磁场，即总磁场 $\vec{H}'$ 为：

$$\begin{aligned}\vec{H}'&=\vec{H}_0+\vec{H}\\ &=\vec{H}_0-\frac{x}{3+x}\vec{H}_0\\ &=\frac{3}{3+x}\vec{H}_0\end{aligned} \tag{10}$$

根据退磁因子的定义[3]，又有：

$$N_D=\frac{\mu_0\triangle H}{J} \tag{11}$$

式中：

$\mu_0$ 为真空磁导率；

$\triangle H$ 为退磁场的大小；

J 为磁极化强度的大小。

故有：

$$N_D=\frac{\mu_0|\vec{H}|}{J}$$

$$\because\ J=\mu_0|\vec{M}|$$

$$\begin{aligned}\therefore\ N_D&=|\frac{\vec{H}}{\vec{M}}|\\ &=\left|\frac{-\frac{1}{3}\vec{M}}{\vec{M}}\right|\\ &=\frac{1}{3}\end{aligned} \tag{12}$$

这就是球形磁粉的退磁因子。

### 参考文献

1 郭硕鸿．电动力学．人民教育出版社

2 四川大学数学系．高等数学．人民教育出版社

3 中国机械工程学会无损检测学会，磁粉探伤，机械工业出版社．