

应用多元非线性回归方法建立 FGH95合金的本构关系

Establishment of Constitutive Relationship for FGH95
Alloy Using Multiple Nonlinear Regression Method

张麦仓 罗子健 曾凡昌 (西北工业大学材料科学与工程学院)
Zhang Maicang Luo Zijian Zeng Fanchang (College of Materials
Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University)

[摘要] 通过等温恒应变速率压缩实验,按最小二乘法原理,采用多元非线性回归方法,建立了FGH95合金的本构关系。与多元线性回归结果对比表明,应用非线性回归方法建立的本构关系精度较高,物理意义明确。本文所用建立本构关系的方法具有适用性,可用于其它工程材料。

关键词 FGH95合金 本构关系 多元非线性回归

[Abstract] Based on the isothermal constant strain-rate compression tests, the constitutive relationship for FGH95 alloy was established by using multiple nonlinear regression method. Compared with that by using multiple linear regression method, it is found that the constitutive relationship proposed in the paper has clear physical background and high regression precision. The method presented in this paper for establishment of constitutive relationship is universally applicable to engineering materials.

Keywords FGH95 alloy constitutive relationship multiple nonlinear regression

1 引言

本构关系,即材料流动应力与应变速率、应变和变形温度之间的关系。它体现了材料在热态塑性加工过程中对热力参数的动态响应,是用有限元法对材料的塑性变形过程进行数值模拟的重要前提。

FGH95是合金化程度很高的Ni基粉末高温合金,其成分相当于美国GE公司的Rene 95合金。由于该合金组成复杂,其高温流动特性呈现高度非线性,因而不能用常规的线性回归方法建立其本构关系。我国从80年代初开始研制FGH95合金,在粉末制备、涡轮盘锻件的试制方面取得了一定进展。随着研究工作的深入,迫切需要建立这种合金的本构关系,以便通过有限元法数值模拟,加速研究工作进展,适应我国航空制件科技发展的要求。

本文在分析等温恒应变速率压缩实验结果的基础上,确定FGH95合金本构关系的形式。然后采用多元非线性回归方法确定模型中的参数,以建立这种合金的非线性本构关系。

2 实验材料及方法

2.1 实验材料

实验采用北京钢铁研究总院用旋转电极雾化法生产的-150目FGH95粉末。经脱气、装套,在1150和120MPa下3h热等静压成 $\phi 76\text{mm} \times 102\text{mm}$ 的坯料。根据排水法测量结果,相对密度大于0.997(理论密度 $8.30\text{g}/\text{cm}^3$)。合金粉末的化学成分为(wt%):0.051C, 3.55Al, 3.65W, 3.50Nb, 3.62Mo, 2.62Ti, 13.01Cr, 8.04Co, <0.10Fe, 0.0033B, 0.025Mn, 0.047Zr, 0.11Si, <0.005P, 0.001S, $2.63 \times 10^{-6}\text{H}$, $14 \times 10^{-6}\text{N}$, $39 \times 10^{-6}\text{O}$,其余为Ni。

2.2 实验方法

坯料首先进行预热处理。规范为:1150 \times 2h,30/h冷却到1100,1100 \times 2h,8/h冷却到900,空冷。然后加工成 $\phi 8\text{mm} \times 12\text{mm}$ 的圆柱形试样。在Thermomaster-Z型热加工模拟实验机上进行等温恒应变速率压缩实验。试验温度(°C):1050,1100,1150;试验应变速率(s^{-1}): 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} ,1;共

12个试验规范。每个规范3个试样，试样的高度压缩率均为50%（真应变0.693）。

试样的加热规范如下：从室温以10 /s 升温速度加热到900，保温2min，再以10 /s 的升温速度加热到变形温度，保温4min。变形结束后，用N₂气冷却。

试验机具有修正试件与压头接触面摩擦及变形过程中热效应的功能。真应变每隔0.05，试验机自动采样输出相应应变下的流动应力数值。

3 本构关系的建立

3.1 非线性回归原理^[1~2]

假定非线性回归模型为

$$y = f(\zeta, \theta) + \omega \quad (1)$$

式中 y 为因变量； $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k]^T$ ，为 k 个自变量构成的向量； $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ ，为 p 个未知参数构成的向量； ω 为服从正态分布的偏差随机变量。

设有 n 组独立观测值：(ζ_i, y_{ie})， $i = 1, 2, \dots, n$ ，其中 $\zeta_i = [\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \dots, \zeta_{ik}]^T$ ， y_{ie} 为相应于 ζ_i 的观测值。根据最小二乘法原理， θ 的最优估计可由下述函数取极小值获得，即

$$S(\theta) = \min S(\theta) = \min \sum_{i=1}^n (y_{ie} - y_i)^2 \quad (2)$$

式中 $y_i = f(\zeta_i, \theta)$ ； θ 为 θ 的最优估计。

将 y_i 在 $\theta^{(l)}$ 处进行泰勒展开，可得

$$y_i = f(\zeta_i, \theta) \approx f(\zeta_i, \theta^{(l)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\zeta_i, \theta)}{\partial \theta_j} \bigg|_{\theta=\theta^{(l)}} (\theta_j - \theta_j^{(l)}) \quad (3)$$

式中 $\theta^{(l)}$ 为未知向量 θ 在进行第 l 步非线性迭代时的值。从而，式 (2) 可写成

$$\min S(\theta) = \min \sum_{i=1}^n [y_{ie} - f(\zeta_i, \theta^{(l)}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\zeta_i, \theta)}{\partial \theta_j} \bigg|_{\theta=\theta^{(l)}} (\theta_j - \theta_j^{(l)})]^2 \quad (4)$$

用高斯-牛顿法求解式 (4) 的极小值，即可确定未知参数 θ 的最优估计 θ 。

3.2 FGH95合金的本构关系

目前，一般采用 Arrhenius 型方程构造工程材料的本构关系^[3]。但是，对于变形高温合金，用这种办法建立本构关系效果不佳。因为这种型式的本构关系不能反映这类组成复杂合金在热态变形过程中加工硬化和再结晶软化的交互作用机制^[4]。因此，对于 FGH95合金，我们在 Arrhenius 型方程中的双曲正弦型方程的基础上，提出以下形式的本构关系模型：

$$\bar{\sigma} = A_1 \bar{\epsilon}^n \sinh^{-1} (A_2 Z)^p (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p) \quad (5a)$$

$$\bar{\sigma} = A_1 \bar{\epsilon}^n \sinh^{-1} (A_2 Z)^p \{1 + \exp[-A_3 (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p)] - \exp[-A_4 (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p)]\} (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p) \quad (5b)$$

式中 $Z = \bar{\epsilon} \exp(A_5/T)$ ，为 Zener-Hollomon 参数； $\bar{\sigma}$ ， $\bar{\epsilon}$ ， $\bar{\epsilon}_p$ 和 T 分别为流动应力、等效应变、等效应变速率及变形温度（绝对温度）； $\bar{\epsilon}_p$ 为相应于峰值流动应力的等效应变； $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, n$ 和 p 为待定参数。

式 (5a) 和 (5b) 所示本构关系的特点是，考虑 $\bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_p$ 阶段的加工硬化和 $\bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_p$ 阶段的动态再结晶和动态恢复引起的软化机制，因而物理意义十分明确。

引入阶跃函数 δ ，式 (5a) 和 (5b) 可统一为：

$$\bar{\sigma} = A_1 \bar{\epsilon}^n \sinh^{-1} (A_2 Z)^p \{1 + \exp[-A_3 \delta (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p)] - \exp[-A_4 \delta (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p)]\} \quad (6)$$

式中 $\delta = 0, \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_p$ ； $\delta = 1, \bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_p$ 。

不难看出，令 $y = \bar{\sigma}$ ； $\zeta = [\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}, T]^T$ ； $\theta = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, n, p]^T$ ，式 (6) 可转化为式 (1) 所示的非线性回归模型。用高斯-牛顿法即可确定式 (7) 中各待定参数的最优估计。

根据等温恒应变速率压缩试验所得样本 ($\bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i, T_i; \bar{\sigma}_i$)， $i = 1, 2, \dots, 168$ ，按式 (6) 用多元非线性回归可得各参数的最优值为： $A_1 = 233.8$ ， $A_2 = 2.54 \times 10^{-13}$ ， $A_3 = 0.2683$ ， $A_4 = 0.1719$ ， $A_5 = 44800$ ， $n = 0.5732$ ， $p = 0.3542$ 。回归偏差平方和 $\sum_{i=1}^n [Y_{ie} - f(\zeta_i, \theta)]^2 = 0.050$ ，回归结果与实验数据对比见图1。

4 结果分析

本文根据 FGH95合金等温恒应变速率压缩试验结果，用多元线性回归方法建立了如下形式的本构关系：

$$\ln \bar{\sigma} = b_0 + b_1/T_1 + b_2 \ln \bar{\epsilon} + b_3 \ln \bar{\epsilon}/T_1 + b_4 (\ln \bar{\epsilon})^2/T_1 + b_5 (\ln \bar{\epsilon})^3/T_1 \quad (7)$$

式中 $T_1 = 1000/(t + 273)$ ； $b_i, i = 0, 1, \dots, 5$ 均为 $\bar{\epsilon}$ 的函数，分别为：

$$b_0 = -6.63 - 1.2081 \bar{\epsilon} - 64.841 \bar{\epsilon}^2 + 212.394 \bar{\epsilon}^3 - 170.229 \bar{\epsilon}^4$$

$$b_1 = 16.6842 + 2.6946 \bar{\epsilon} + 80.9165 \bar{\epsilon}^2 - 281.146 \bar{\epsilon}^3 + 230.046 \bar{\epsilon}^4$$

$$b_2 = 1.12 - 1.4948 \bar{\epsilon} - 17.8606 \bar{\epsilon}^2 + 56.9387 \bar{\epsilon}^3 - 44.1397 \bar{\epsilon}^4$$

$$b_3 = -1.266 - 1.444 \bar{\epsilon} + 39.499 \bar{\epsilon}^2 - 105.817 \bar{\epsilon}^3 + 77.9625 \bar{\epsilon}^4$$

$$b_4 = 0.0422 - 1.4789 \bar{\epsilon} + 6.1085 \bar{\epsilon}^2 - 11.0416 \bar{\epsilon}^3 + 6.8122 \bar{\epsilon}^4$$

$$b_5 = 0.0048 - 0.1359\bar{\epsilon} + 0.5634\bar{\epsilon}^2 - 1.0189\bar{\epsilon}^3 + 0.6276\bar{\epsilon}^4$$

归值与实验值的最大误差为8.6%。回归值与实验值的对比见图2。

按式(7)所示本构关系, 回归偏差平方和为0.0747, 回

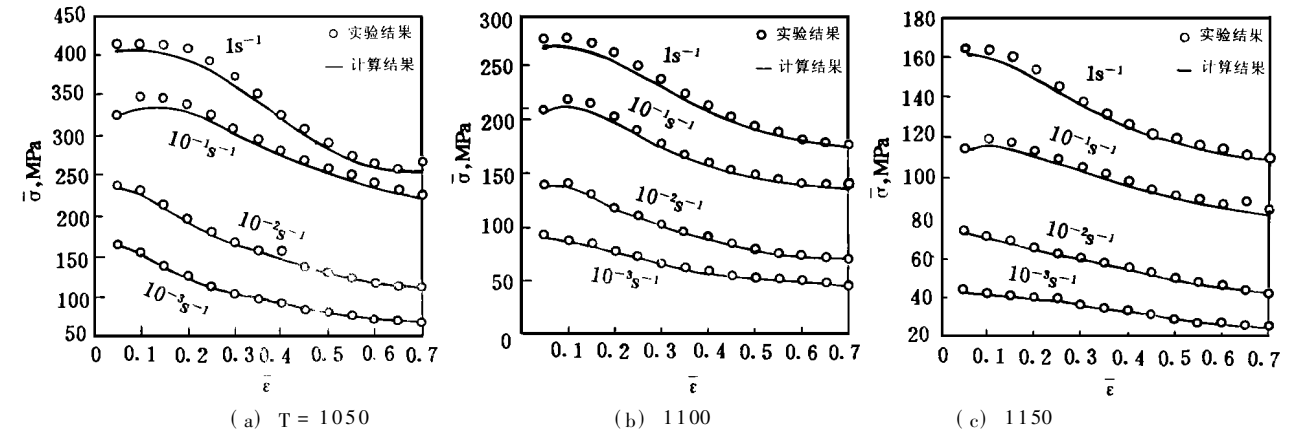


图1 非线性本构关系计算结果与实验值比较

Fig. 1 Comparison of results calculated by using Eq (6) with experimental data

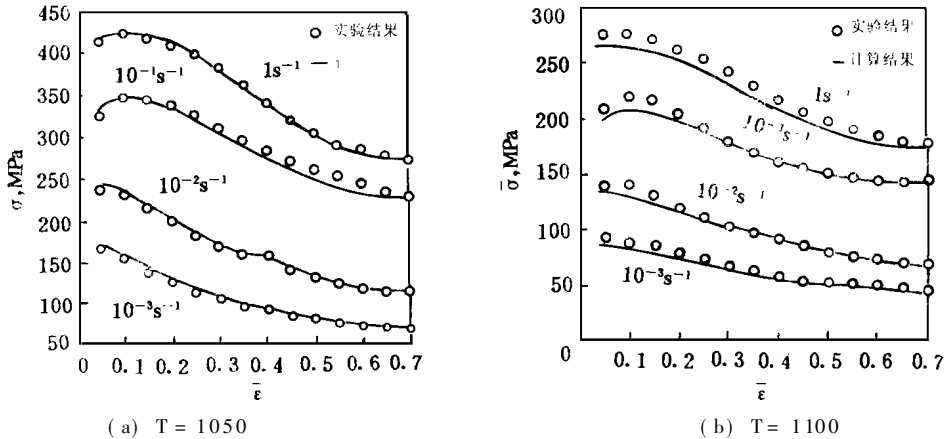


图2 线性本构关系计算结果与实验值比较

Fig. 2 Comparison of results calculated by using Eq (7) with experimental data

对比图1和图2可以看出, 与多元线性回归建立的本构关系相比, 非线性回归方法建立的本构关系不仅物理意义明确, 而且形式简单, 回归精度较高。

5 结论

(1) 本文首次提出的 FGH95 非线性本构模型物理意义明确, 结构简炼, 引入有限元算法可提高计算精度。

(2) 本文提出的建立本构关系的方法具有广泛适用性, 也适用于其它难变形材料。

参考文献

- 1 周纪芸编. 回归分析. 华东师范大学出版社, 1991
- 2 N. R. Drapper and H. Smith. Applied Regression Analysis,

John Wiley & Sons, Inc., 1981

- 3 K. P. Rao and E. B. Hawbdt. Development of Constitutive Relationships Using Compression Testing of a Medium Carbon Steel. J. of Engineering Materials and Technology, 1992, 114: 123
- 4 刘东, 罗子健. 以 Zener-Hollomon 参数表示 GH169 合金的本构关系. 塑性工程学报, 1995, 2 (1): 15

稿件收到日期: 1998. 3. 9

张麦仓, 男, 1967年10月出生. 西北工业大学材料科学与工程博士研究生. 研究方向: 新材料锻造工艺和锻件质量控制. 通讯地址: 西安市西北工业大学542信箱 (邮编: 710072)