

材料的一种新型单向应力应变本构模型

A New Constitutive Relationship Between Stress and Strain for Materials

张于贤^{1,2}, 王 红²

(1 华南理工大学, 广州 510641; 2 桂林电子工业学院, 广西 桂林 541004)

ZHANG Yu-xian^{1,2}, WANG Hong²

(1 South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;

2 Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, Guangxi, China)

摘要: 为了有效地研究自增强超高压容器的残余应力, 本研究提出了一个新型的应力-应变关系模型。通过严格的数学证明, 表明该模型比别的模型更接近于自增强超高压容器用钢的实际工作情况。然后以某材料为例介绍了建立该新型模型的方法, 并对其误差进行了分析。通过这个实例, 说明了由一般的拉伸曲线求解该新型的应力-应变关系模型的可行性及可靠性, 具有一定的理论意义及工程实用价值。

关键词: 自增强; 应力-应变本构关系; 解析式; 拟合; 硬化参数

中图分类号: TG113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4381(2007)02-0007-04

Abstract: In order to effectively study the residual stresses of auto-frettagea super high pressure vessel, this paper first offers a new model of the constitutive relationship of stress-strain. Through the strict mathematical testimony, this model is shown to be closer to the actual working condition of the steel applied in auto-frettagea super high pressure vessel than other models; then this paper describes how this model is established by taking some material as examples, and analyzes the model's error. This example illustrates the feasibility and the reliability of solving the new constitutive relationship for stress and strain based on general tensile curves. The model also has theoretical signification and engineering practical value to a certain extent.

Key words: auto-frettagea; constitutive relationship of stress-strain; analytical formula; fitting; hardening exponent

高压及超高压容器在现代工业的许多领域得到了广泛应用。其中厚壁圆筒容器是用得最普遍的一种形式。由于当容器承受内压时其相当应力随半径的增大而按平方规律减小, 所以这种不合理的应力分布规律严重地限制了容器的弹性工作范围^[1]。为了解决这个问题, 人们创造了许多组合形式的超高压容器及强化技术, 自增强处理就是其中的强化技术之一。

自增强技术发明于 20 世纪初, 由于具有很强的适用性而广受重视, 对其残余应力的分布进行了较为详细的研究, 得出了不少解析解和数值解^[2,3]。虽然这些解都能给出较为满意的结果, 但也存在着一个共同的不足之处就是在具体计算时对材料都作了如下的屈服假定: 材料由弹性到塑性是一个突然的转折。本研究认为该假定只有低碳钢一类材料才具有这种性质, 但这种材料是不适于制造超高压容器的, 超高压容器

用钢一般都是低合金高强度钢。这类钢在载荷作用下由弹性到塑性是一个渐进的过程^[4]。若对这类材料仍采用上述假定, 则计算出的各应力在弹塑性界面上将出现较大的误差。而弹塑性界面压力又正是许多研究者所关心的问题, 因而应该寻求更加适用于超高压容器用材料的应力应变关系模型。

1 一种新型的应力应变关系模型

低合金高强度钢的拉伸应力-应变关系曲线如图 1 所示。它可分为两个阶段, 开始阶段是线性的, 超过比例极限(即图中 P 点)以后应力-应变关系表现出非线性。

为此, 引入下面的分段函数来表示这两个阶段的应力-应变关系:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ \sigma_p + \alpha[1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}}] & (\varepsilon > \varepsilon_p) \end{cases} \quad (1)$$

式中: E 为材料的弹性模量; σ_p 材料的比例极限; α 为材料的硬化参数。

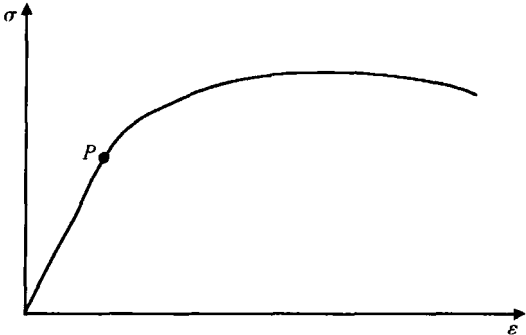


图 1 低合金高强度钢的拉伸应力-应变关系曲线
Fig. 1 Stress-strain curve for high strength with low alloy composition

2 函数的可导性证明

由(1)式可得: 在 $\varepsilon = \varepsilon_p$ 点处的左右导数分别为:

$$\sigma'(\varepsilon_p^-) = (E\varepsilon)' = E \quad (2)$$

$$\sigma'(\varepsilon_p^+) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\sigma_p + \alpha \left(1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \right) \right] \right|_{\varepsilon = \varepsilon_p} = E \quad (3)$$

所以, 由(2)式和(3)式可知:

$$\sigma'(\varepsilon_p^-) = \sigma'(\varepsilon_p^+) = E$$

亦即, (1)式所表示的函数关系式在 $\varepsilon = \varepsilon_p$ 处的左导数与右导数相等, 表明该点处是可导的, 所以, 函数关系式(1)所对应的曲线在 $\varepsilon = \varepsilon_p$ 处是光滑的, 也就是说, 曲线从线性段(弹性变形段)到非线性段(弹塑性变形段)能实现光滑过渡, 不会产生突然转折。因此, 引入了应力应变关系的数学模型(1)式以后, 使得超高压容器用钢从弹性变形过渡到塑性变形是一个渐进的过程, 这更接近于实际情况。

3 材料硬化参数的确定

3.1 基本原理

对于某种材料而言, 在已知材料的拉伸曲线时, 为了确定其数学模型, 关键之处就是确定材料的硬化参数 α 。材料的硬化参数 α 只与弹塑性变形阶段材料的应力应变曲线的形状有关。如果已知材料的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线, 则可从曲线中的弹塑性阶段取一系列数据点(实验点), 然后通过插值或拟合的数值计算方法即可求得材料的硬化参数 α 。

3.2 实例

已知某材料的拉伸应力-应变曲线如图 2 所示。

由图 2 可知, 该曲线没有明显的塑性屈服阶段, OA 段为弹性变形, A 点以后为弹塑性变形, 且 $\varepsilon_p = 0.032$, $\sigma_p = 955\text{MPa}$ 。所以, 材料的弹性模量为:

$$E = \sigma_p / \varepsilon_p \approx 29844 \text{ (MPa)}$$

3.2.1 求应力-应变关系表达式

为求其如式(1)所示的应力-应变关系曲线表达式, 首先在曲线上取一系列点, 其数值如表 1 第 2、3 列所示。本例中只取曲线的上升段, 即 $A - H$, 而 H 点以后曲线开始下降, 材料出现颈缩变形, 已明显不能正常工作, 实际工作中, 材料一般不会工作在这一段上, 故对这一段的研究无工程价值。所以, 在本例中, 对于 H 点以后的曲线下降段没有进行研究。

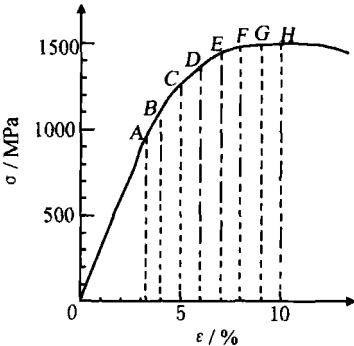


图 2 某材料的拉伸应力-应变曲线
Fig. 2 Stress-strain curve for some material

在(1)式中, 第一个方程为:

$$\sigma = E\varepsilon = 29844\varepsilon \quad (4)$$

将第二个方程作如下变形:

$$\sigma - \sigma_p = \alpha \left[1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \right] \quad (5)$$

由于:

$$e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha} \right]^k$$

对上式取前三项近似值得:

$$e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \approx 1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha} + \frac{[(\varepsilon - \varepsilon_p)E]^2}{2\alpha^2} \quad (6)$$

将上式代入(5)式得:

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_p &= \alpha \left[1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{\alpha}} \right] \approx (\varepsilon - \varepsilon_p)E \\ &\quad - \frac{[(\varepsilon - \varepsilon_p)E]^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

在上式中, 令:

$$y = \sigma - \sigma_p \quad (8)$$

$$x = (\varepsilon - \varepsilon_p)E \quad (9)$$

将上两式代入(7)式得:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2\alpha} \quad (10)$$

上式中, y 及 x 是经变量代换后的新变量, 其取值如表 1 中第 4、5 列所示。

表 1 应力应变曲线实验点数值与模型拟合值

Table 1 Test data values of stress-strain curve and fitting values for the model

Point	$\varepsilon/\%$	σ/MPa	y	x	$(y_i - x_i)x_i^2$	x_i^4
A	3.2	955	0	0	0	0
B	4.0	1120	165	238.752	-4.024×10^6	3.249×10^9
C	5.0	1250	295	537.192	-6.989×10^6	8.328×10^{10}
D	6.0	1360	405	835.632	-3.007×10^8	4.876×10^{11}
E	7.0	1430	475	1134.072	-8.477×10^8	1.654×10^{12}
F	8.0	1480	525	1432.512	-1.862×10^9	4.211×10^{12}
G	9.0	1490	535	1730.952	-3.583×10^9	8.977×10^{12}
H	10.0	1500	545	2029.392	-6.113×10^9	1.696×10^{13}
Remark	Test data	Test data	Calculation value	Calculation value	$\sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 = -1.272 \times 10^{10}$	$\sum_{i=1}^8 x_i^4 = 3.238 \times 10^{13}$

现根据最小二乘原理求材料的硬化参数 α ^[5]

设:

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^8 [y_i - f(x_i)]^2 = \sum \left[y_i - x_i + \frac{x_i^2}{2\alpha} \right]^2$$
$$= \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 + \frac{1}{4\alpha^2} \sum_{i=1}^8 x_i^4 \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 - \frac{1}{2\alpha^3} \sum_{i=1}^8 x_i^4$$
$$= -\frac{2\alpha \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 + \sum_{i=1}^8 x_i^4}{2\alpha^3}$$

令: $\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$ 得:

$$-\frac{2\alpha \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 + \sum_{i=1}^8 x_i^4}{2\alpha^3} = 0$$

即:

$$2\alpha \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2 + \sum_{i=1}^8 x_i^4 = 0$$

所以:

$$\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^8 x_i^4}{2 \sum_{i=1}^8 (y_i - x_i)x_i^2} \tag{12}$$

将表 1 中的相应数值代入上式得:

$$\alpha = -\frac{3.238 \times 10^{13}}{-2 \times 1.272 \times 10^{10}} \approx 1273 \text{ (MPa)}$$

将 $E = 29844\text{MPa}$, $\varepsilon_p = 0.032$, $\sigma_p = 955\text{MPa}$, $\alpha = 1273\text{MPa}$ 代入(1) 式可得这种材料的应力-应变关系为:

$$\sigma = \begin{cases} 29844\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ 955 + 1273[1 - e^{-\frac{29844\varepsilon - 0.032}{1273}}] & (\varepsilon > \varepsilon_p) \end{cases} \tag{13}$$

或:

$$\sigma = \begin{cases} 29844\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ 2228 - 1273e^{0.750 - 23.444\varepsilon} & (\varepsilon > \varepsilon_p) \end{cases} \tag{14}$$

3. 2. 2 误差分析

现对上述实例的结果进行误差分析, 本研究把表 1 中的数值作为真实值, 按公式(14) 算出的值是近似值(拟合值)。分析对象是弹塑性变形阶段, 即图 2 中标有字母 A—H 的这一段。现将 A, B, ..., H 共 8 个点的真实值、拟合值、绝对误差、相对误差列表计算如表 2 所示。

表 2 模型拟合值与实验点实测值比较及误差分析数据

Table 2 Fitting values of the model and data of error analysis

Point	$\varepsilon/\%$ (test data)	σ/MPa (test data)	σ/MPa (fitting value)	Absolute error/MPa	Relative error/ %
A	3.2	955	955	0	0
B	4.0	1120	1173	53	4.73
C	5.0	1250	1321	71	5.68
D	6.0	1360	1441	81	5.96
E	7.0	1430	1515	85	5.94
F	8.0	1480	1572	92	6.23
G	9.0	1490	1588	98	6.58
H	10.0	1500	1603	103	6.87

由于用最小二乘原理所求的拟合函数(14)的拟合值与实际值相比较的相对误差均小于 7%,表明用这个方法所求的应力-应变拟合关系式能够满足工程的需要。

4 结论

(1) 增加实验点的个数, 上述实例中, 采用的实验点个数是 8 个, 可以根据精度的要求, 增加实验点个数至 15 个或更多, 这样可以提高拟合函数的精度。

(2) 在(6)式中, 用了 $e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{a}}$ 的麦克劳林展式的前三项来近似代替 $e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{a}}$, 通过增加所取麦克劳林展式前面的项数的方法即可提高用麦克劳林展式近似代替 $e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_p)E}{a}}$ 的精度, 从而提高拟合函数的精度。需要指出的是, 在表 2 中各点的拟合值均大于实际值, 这说明在实际中采用拟合值(即由拟合函数(14)式计算的值)是偏于危险的, 在实际使用时必须得考虑到这一点。

参考文献

[1] 张于贤, 王红, 陈德淑. 关于计算最佳弹塑性界面半径的探讨[J]. 重庆大学学报, 2004, 27(6): 30-40.

[2] 许德明, 吉桂英. 焊接压力容器残余应力分析[J]. 湘潭矿业学院学报, 1997, 12(2): 54-60.

[3] 杜秀菊, 刘继承, 沈桂英. 自增强管残余应力在交变内压作用下松弛规律的实验研究[J]. 油气田地面工程, 2001, 20(1): 47-48.

[4] 刘小宁. 超高压容器常用钢材包辛格系数的探讨[J]. 化工设计通讯, 2003, 29(4): 39-43.

[5] 王浩, 范广涵, 廖常俊, 等. 应用最小二乘法完善质量流量计的工作曲线[J]. 仪器仪表学报, 2004, 25(6): 770-772.

基金项目: 中国核动力院研究项目(W200220); 桂林电子工业学院资助项目(Z200416)

收稿日期: 2006-01-04; 修订日期: 2006-04-25

作者简介: 张于贤(1968-), 男, 博士后, 副教授, 主要从事机械设计及理论、射流理论及应用、高压容器和工业工程等方面的研究. 联系地址: 广西桂林电子工业学院管理系工业工程教研室(541004)。

(上接第 6 页)

[J]. 传感器技术, 2004, 23(5): 9-14.

[7] PIJOLAT C, VIRCELLE P, TOURNIER G, et al. Application of membranes and filtering films for gas sensors improvements[J]. Thin Solid Film, 2005, 490, 7-16.

[8] 杨留方, 方静华. 铁酸镍锌纳米复合材料的制备及气敏特性研究[J]. 测控技术, 2004, 23(4): 14-20.

[9] ISOLD S, NICOLAE B, MICHAEL B, et al. Micromachined metal oxide gas sensors: opportunities to improve sensor performance[J]. Sensors and Actuators B, 2001, 73(1): 1-26.

[10] HOEL A, REYES L F, HESZLER P. Nanomaterials for environmental applications: novel WO₃-based gas sensors made by advanced gas deposition[J]. Current Applied Physics, 2004, 4: 547-553.

[11] LIONEL V. Growth of arrayed nanorods and nanowires of ZnO from aqueous solutions[J]. Adv Mater, 2003, 15(5): 464-466.

[12] WANG Zhong-lin. Zinc oxide nanostructures: growth, properties and applications[J]. J Phys Condens Matter, 2004, (16): 829-858.

[13] ZHANG J, LING D S, YIN J L, et al. Control of ZnO morphology via a simple solution route[J]. Chem Mater, 2002, 14: 4172-4177.

[14] LIU Bin, ZENG Hua-chun. Fabrication of ZnO "Dandelions" via a modified kirkendall process[J]. J Am Chem Soc, 2004, 26: 16744-16746.

[15] WEN Xiao-gang, FANG Yue-ping, FANG Q, et al. ZnO nanobelt arrays grown directly from and on zinc substrates synthesis, characterization, and application[J]. J Phy Chem B, 2005, 109: 15303-15308.

[16] 仲维卓, 华素坤. 纳米材料及其水热法制备[J]. 上海化工, 1998, 23(11): 25.

[17] XU Jia-qiang, CHEN Yue-ping, CHEN Dao-yong, et al. Hydrothermal synthesis and gas sensing characters of ZnO nanorods[J]. Sensors and Actuators B, 2006, 113: 526-531.

[18] 徐甲强, 王焕新, 张建荣, 等. 微波水解法制备纳米 ZnO 及其气敏特性研究[J]. 无机材料学报, 2004, 19(6): 1441-1445.

[19] FENG P, WANG Q, WANG T H. Contact-controlled sensing properties of flowerlike ZnO nanostructures[J]. Applied Physics Letters, 2005, 87: 213111-1-213111-3.

[20] RAO B B. Zinc oxide ceramic semiconductor gas sensor for ethanol vapour[J]. Mater Chem Phys, 2000, 64(1): 62-65.

[21] 徐甲强, 纪朋, 李志伟. 水热法合成氧化锌亚微米棒及气敏性能研究[J]. 郑州轻工业学院学报, 2005, 20(3): 1-3.

[22] 胡平, 徐甲强. 氧化物掺杂对氧化锡酒敏性能的影响[J]. 郑州轻工业学院学报, 1998, 13(2): 52-56.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(20471007)

收稿日期: 2006-03-05; 修订日期: 2006-07-10

作者简介: 杨洪伟(1975-), 男, 工程师, 硕士研究生, 从事低维信息功能材料研究. 联系地址: 陕西省宝鸡市 96411 部队 26 分队(721006)。