

# 材料断口分形研究现状及发展前景

## Current Situation and Prospects for Investigation of Fractal Fracture of Materials

曹 睿, 马 勤, 陈剑虹(兰州理工大学 有色金属合金  
省部共建教育部重点实验室, 兰州 730050)

CAO Rui, MA Qin, CHEN Jian-hong(Key Laboratory of Non-ferrous Metal  
Alloys, The Ministry of Education, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**摘要:** 讨论了分形几何应用于断裂研究的几个基本问题, 主要包括断面的分形特征与分形测量, 分维与断裂韧性的关系以及金属断裂的多种分形模型。进一步阐述了分形理论在金属断裂方面的应用前景。

**关键词:** 分形; 分维; 断裂韧性; 分形断裂模型

中图分类号: TG301 文献标识码: A 文章编号: 1004-4381(2007)07-0078-05

**Abstract:** This paper discusses some problems in the research of fractal fracture including the fractal characters of fracture surfaces and the measurement of their fractal dimensions, the relationship between fractal dimensions of fracture surfaces and macroscopic mechanical properties such as fracture toughness etc., the fracture models and the fractal fracture mechanism. Furthermore, the prospects of performance of fractal theories on metal fracture are advanced in the paper.

**Key words:** fractals; fractal dimension; fracture toughness; fractal fracture models

近年来金属材料损伤断裂研究方面的重要发展是深入到材料微细观层次上研究断裂的本质特征。材料的损伤断裂过程一般可描述为有大量微损伤成核、扩展、连接, 最终导致材料的断裂破坏。多年来, 材料学家们一直试图从材料的微观结构本身及损伤断裂过程所反映的复杂现象中找出某些特征参数, 并建立与宏观力学间的联系。已有的研究表明, 金属材料的断裂是发生在非平衡条件下的非线性不可拟动力学过程。根据非平衡统计观点, 实际金属材料显微结构及其性能可以表征为确定性平均结构上叠加了不均匀的随机涨落, 由于涨落机制的作用, 金属材料的损伤演化过程呈随机特征。实际的断口形貌不仅受到材料微观结构的影响, 而且还与外部加载方式和环境条件有关, 众多复杂的因素造成材料的断口表面是极不规则和粗糙不平的, 这种不规则程度从某种意义上反映了材料的力学性能和断裂机理, 但遗憾的是到目前为止还没有一种合适的方法来定量描述断裂面的特征。随着对断口表面细节特征的深入观察, 发现裂纹扩展往往是按 Z 字形前进的, 每一步都是不规则的, 大小不等, 方向不一, 而且在大的 Z 字形通道上套有小的 Z 字形通道, 整个裂纹路径形成多层次结构, 导致断裂面是粗糙的、不规则的, 具有统计自相似性, 即裂纹是一条分形曲线, 极不规则且粗糙不平的, 具有所谓的统

计自相似结构, 即分形特征, 断裂面是一个分形表面<sup>[1-3]</sup>。1984 年 Mandelbrot<sup>[1]</sup> 等人首次将分形理论用来描述断口的特征, 指出: 虽然金属断口不是严格的分形几何, 但与分形结构极为相似, 即认为金属断口是一近似的分形结构, 并计算了马氏体时效钢的冲击能与断口分形维数的关系。近来运用分形几何表征断裂表面, 已经成为断裂表面定量分析的一种受欢迎的新方法。断裂表面的分形维数作为断裂表面粗糙度的一种度量, 是最关键的参数。人们用垂直截面法、小岛分析法、扫描二次电子法等方法测得多种材料断口的分维, 并与材料某些物理力学性能建立了关联<sup>[3-5]</sup>。现有断裂分形研究的基本观点认为, 断裂表面粗糙度可以用分形维数来定量描述, 已开展的工作也仅仅局限于分形维数测定以及寻找断裂参数与分形维数之间的定量关系。一时间, 似乎材料所有的性能均与分形维数有关, 这显然是不科学的。

由于现有断口分形研究未考虑实际断口形貌特征参数的物理意义, 尽管开展了不少的研究工作, 也形成了一些模型, 但是并未形成普适的理论和方法。本文将最近的材料断口分形分析研究状况给以总结。

### 1 断面的分形特征与分形测量

对于分形, 还没有一个严格且实用的定义, 因此在

分形应用研究中需要注意不同的分维定义间的细微差别。一般而言,按照分形的基本特点(自相似性和标度不变性),其分维测量原理可分为两大类:通过改变粗视化程度或利用测度关系进行分维测量。目前,应用于断面分维测量的方法很多。如剖面岛法(slit-island analysis),断裂剖面线法(fracture-profile method)、谱分析法、二次电子线法、相关函数法等。这些方法的一个共同特点就是间接地通过剖面(降低一维)来测量断面分维。尽管已有一些方法(如表面吸附法等)可以直接测定粗糙表面的分维,但这在断面的分维测量中是极为困难的。这里,应用最广、同时也是存在争议最多地测量方法是剖面岛法(或称小岛法)<sup>[1]</sup>和断裂剖面线法<sup>[6]</sup>。

小岛法是根据周长-面积测度关系来求分维。

规则图形的周长  $P$  与面积  $A$  有如下关系:

$$P \propto A^{1/2} \quad (1)$$

不规则图形的周长与面积的关系为:

$$P(\delta)^{1/D} = a(\delta)A(\delta)^{1/2} \quad (2)$$

(2) 式中,  $D$  为不规则图形边界线的分维,  $\delta$  为测量码尺,  $a(\delta)$  并非一常数,而与测量码尺有关。对式(2)两边取对数,则有:  $\ln P = D/2 \ln A + c$ 。作  $\ln P - \ln A$  曲线,如存在相当长的直线部分,则  $D/2$  为直线斜率。用小岛法测定金属断口表面分维时的具体实验过程为:利用真空镀膜技术将金属断口表面镀上一层镍,然后平行于断口平面用细砂纸磨去一层并抛光,断口表面凸出的部分被磨去之后在显微镜下发亮,称之为“岛”,没有磨到的凹处因存在镀镍层而发暗,称之为“湖”,于是在图像分析仪的屏幕上断口平面成为形状各异的“湖”中之“岛”。测定每个“岛”的周长和面积,即可求其分维。

垂直剖面法的原理是改变观测尺度,即用单位长度去近似分形复杂曲线,先把曲线一端作为起点,然后以此点为中心画一个半径为  $r$  的圆,与曲线相交于一点。用直线把该点与曲线的起点连接起来后再把该点作为新的起点画弧与曲线相交,反复进行上述过程,把测得的线段总数记为  $N(r)$ 。若改变单位长度,则  $N(r)$  也变化,具体关系如下:

$$N(r) = L/r \propto r^{-D} \quad (3)$$

$$L \propto r^{1-D} \quad (4)$$

式中  $L$  为分形复杂曲线的总长度。对式(4)两边取对数,作  $\ln L - \ln r$  曲线,若存在相当长的直线部分,则  $1-D$  为直线斜率。用垂直剖面法测定分维的具体过程为:将金属断口沿两个不同方向垂直剖开,分别得到两条断口边界轮廓线;利用图像分析仪在不同放大倍数下分别测出两条断口边界线的长度,再用上述算法得

到两个分维,即垂直和平行于裂纹扩展方向的分维。

总的来说,小岛法比较成熟,使用者较多,但目前垂直剖面法在金属断口分析方面的应用也日益广泛。

但是由于采用小岛法或者垂直剖面法测量时都存在自己的缺点,因此在测量时需要注意保证测量精度的范围。纵合以前的研究结果<sup>[7-10]</sup>,要正确描述断面的分形特征,以下3点是必不可少的:(1)自相似性或自仿射性的判断;(2)分维及其误差范围;(3)存在分形特征的标度范围。

## 2 分维与断裂韧性的关系

就断裂问题而沿,仅仅认识到断面具有分形特征是远远不够的,单纯的分维并不能对断裂研究提供任何有用的信息。借用 Kadanoff 的观点,我们需要回答分形现象背后所隐藏的物理或力学规律<sup>[11]</sup>。为此,在分形断裂的研究中,人们一开始就尝试建立断面分维与宏观力学性能间的关系,而这一方面的绝大部分工作建立在实验研究的基础上。针对不同的材料,不同的断裂破坏规律,已经提出了很多经验关系。Mandelbrot 等首先发现,经过不同热处理温度的时效钢冲击断裂后的断面分维与冲击能成反比关系<sup>[1]</sup>。此后大量的实验研究表明,断面分维与宏观力学性能(如断裂韧性、动态撕裂能、疲劳寿命等)有关<sup>[7,13-17]</sup>。最近人们最为关心的是分维与韧性或断裂韧性间的关系。按照经典断裂力学和定量断口分析的经验知识,粗糙的断面在断裂过程中需要消耗较多的能量,也就是说,其断面分维越大,材料的韧性越好<sup>[12,13]</sup>。以临界应力强度因子表征的材料断裂韧性  $K_{IC}$  与分形维度增量  $D^*$  之间存在如下关系:  $K_{IC} = E a_0^{1/2} D^{*1/2} = Y(s) \sigma_c^{1/2}$ , 这里  $E$  为弹性模量,  $a_0$  为单位长度的参数。 $D^*$  的测量是通过全部断裂表面的平均值及其它粗糙度的测量而得<sup>[14-17]</sup>。事实上实验结果远比此复杂,对分形在断裂研究中的应用持怀疑的一个主要问题就是:用分维这一高度抽象的几何量难以反映复杂的断裂破坏过程。最近的一系列实验结果加深了这种观点。Pande 等发现钛合金材料的动态撕裂能和断口分维之间并没有明显的对应关系<sup>[18]</sup>。Baran 等发现对玻璃、陶瓷等脆性材料,断面分维与断裂韧性间也不存在定量关系<sup>[19]</sup>。

文献[20]指出,  $G_{IC}$ ,  $K_{IC}$  是起裂参量,而非过程参量,而分形维数  $D$  具有熵意义,是个过程参量,因此起裂参量  $G_{IC}$ ,  $K_{IC}$  不能用断裂过程参量  $D$  表征。这个观点粗看十分自然,但事实并非如此。材料细观结构几何特征的不规则性可以由分形维数来表征,而材料的韧性参量(实际上是所有力学参量)与材料细观结构形

貌密切相关, 相同的材料由于细观结构的不同, 它们的韧性参数是有区别的, 这种区别就反映在  $G_{IC}$ ,  $K_{IC}$  与  $D$  的相关性上, 应该用分形几何方法对材料细观结构进行几何分析才能定量地表征出来。可以说断口的分形结构是断裂过程的产物, 但从更深一层的意义上来说, 它是材料细观结构的产物, 因为裂纹的不规则形貌是由材料细观结构特征所决定的, 所以, 从分形概念的本质出发, 称  $D$  是一个材料结构的几何参量比称  $D$  是一个过程参量更恰当。因此引入  $D$  到  $G_{IC}$ ,  $K_{IC}$  的表达式中, 这正反映了细观结构特征对材料韧性参数的影响, 与  $G_{IC}$ ,  $K_{IC}$  仅是起裂参量, 不能表征过程并不矛盾。

许多学者<sup>[1, 7, 12, 13, 21]</sup> 认为断口表面的分维是金属断裂表面粗糙度的一种量度, 它与金属内部的组织和性能有关。此外苏辉等<sup>[22]</sup> 指出: 用断口表面的分维可定量描述断口特征和断裂机制。而龙起易等<sup>[23]</sup> 认为: 用小岛法测定的断口分维仅仅反映了断口轮廓峰某一等高线的不规则性, 不适用于描述断口的粗糙度; 实际断口只是统计意义下的分形结构, 是一种随机分形。随着分形理论研究的进一步深入, 有的研究者利用随机分形模型精确地计算了沿晶断裂表面的维数<sup>[24, 25]</sup>。

在以往的断裂研究中, 对分维的物理意义已有了较深刻的认识: 分维是熵的一种量度, 并且还是一个状态函数。对于固定的几何图形或演化过程的任一暂定状态而言, 分维不仅存在而且具有唯一性。形成断口分维有各种各样的机制, 其中有的机制和材料特性关系较弱, 如斜裂纹扩展、动裂纹扩展的不稳定性等; 有的则和材料特性有关, 如穿晶裂纹、裂纹分叉增韧<sup>[26]</sup> 等, 人们测得的往往是它们的综合表现, 即“有效分维”。有效分维不可能是普适值, 许多实验已说明断口分维是和材料特性有关的。很显然, 认为所有材料的断面分维都为普适值至少目前尚无足够的实验结果和理论依据; 明确指出断面分维与材料的宏观力学性能及微观结构相关的文献也不少。由此可见, 分维与断裂韧性间的关系仍是一个有待解决的问题。

### 3 金属断裂的多种分形模型

从某种意义上讲, 断面的分形特征意味着损伤断裂过程具有标度不变性。为了进一步揭示复杂的损伤断裂过程的内在机理, 人们相继建立了一些分形断裂模型。这些模型的建立大多依据对断裂过程的实验观察, 仅是在定性上或半定量的程度上说明有关的实验结果或者对断面分维做一估算。

通过对金属断裂的分形研究, 提出了多种金属断裂分形模型。微观断裂是宏观断裂的基础, 而材料微

观断裂一般是沿晶断裂、穿晶断裂及它们的偶合形式。这些断裂方式在细观上是不规则的, 是一种分形并导致断裂表面起伏不平, 极不规则。龙期威<sup>[27]</sup> 最早提出了沿晶开裂的分形模型, 把沿晶裂纹从统计和近似意义下看成是 Koch 曲线, 晶粒的一边可以看成是 Koch 曲线中的最小步长, 裂纹沿着 Z 字形扩展, 它好似海岸线一样, 具有自相似的嵌套结构。苏辉等随即提出了沿晶断裂的随机分形模型<sup>[28]</sup>, 并指出沿晶断裂中晶间夹角变化导致分维变大。谢和平根据他们的实验提出穿晶脆性断裂模型, 如图 1 所示<sup>[29]</sup>。在沿晶断裂与穿晶断裂交界处出现了一种沿晶和穿晶的偶合体, 这种偶合体的简化分形模型如图 2 所示<sup>[30]</sup>。同时在考虑疲劳加载状况下, 一些学者又相继提出了疲劳断裂的分形模型<sup>[31, 32]</sup>。通过对脆性断裂物理过程的研究, 以及对微观断裂模型、韧性材料疲劳断裂分形模型的对比分析, 王有明等人提出了韧脆性断裂统一的分形模型, 如图 3 所示, 随着  $\theta$  的不同, 可呈现不同的断裂机制<sup>[33]</sup>。章冠人<sup>[34]</sup> 以及 Hiroyuki<sup>[35]</sup> 从理论及实验上提出韧性与脆性断裂的判据以及它们相互转变的机制, 而这种机制的转变与材料的断面分形维数相关。丁晓峰等<sup>[36]</sup> 通过对位错分维、断口形貌分维和断裂韧度的研究, 发现位错分维与断口形貌分维之间具有相对性、共存性, 同时发现该两种分维与断裂韧度之间分别具有正负相关的特性。这些特性揭示了合金钢断裂的滑移切变和穿晶断裂的特征, 揭示了合金钢断裂的延性、脆性转变的相对性、共存性。江来珠等首先在严格自相似基础上建立了易切削钢冲击断口裂纹扩展的分形几何模型<sup>[37]</sup>。类维生等建立了裂纹扩展速率的分形结构模型<sup>[24]</sup>。随后李学良等建立了易切削钢裂纹扩展的随机分形模型, 该模型与实际情况比较吻合, 减小了原有模型与实际情况的偏差<sup>[38]</sup>。分形断裂要回答的重要问题之一是分形断面形成的物理机制。为此必须涉及裂纹扩展的动力学过程以及相应的分叉、连接现象。高峰<sup>[26]</sup> 以及 Xie<sup>[39]</sup> 结合分形几何学提出了裂纹分叉模型, 同时 Lu<sup>[40]</sup> 提出了演化诱致突变模型。与此同时在其他各个方面都提出了很多分形模型, 这里不予列举。

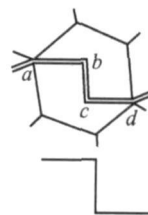


图 1 穿晶脆性断裂模型

Fig. 1 Fractal model of transgranular fracture

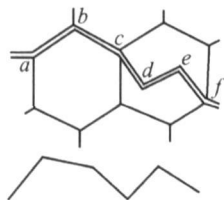


图2 沿晶和穿晶的偶合体的简化分形模型

Fig. 2 Fractal model of intergranular and transgranular fracture

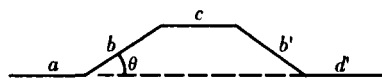


图3 韧脆性断裂统一的分形模型

Fig. 3 United fractal model of brittle fracture and ductile fracture

## 4 断面分维的意义

分形维数是描述分形特征的定量参数,根据不同的维数定义,提出了多种测量与计算方法。由不同方法所得到的分形维数值往往不可比较,即使采用同一种方法计算得到的分形维数,也会由于计算者对测量码尺的选择、对无标度区大小的选择等因素影响而有很大差异。由于实际分形体往往不具备无限层次的自相似结构,所测量的维数随尺度变化而变化,只有在一定层次范围内得到的维数才收敛于某一特定值,这个范围就是线性无标度区。因此检测有无无标度区就成为判断一种计算方法是否准确的依据。

分形维数的大小被用来作为断裂表面粗糙程度的一种度量,后来又发展用来研究材料中微孔的大小和分布、夹杂分布、裂纹分布以及不同尺度缺陷的分布等等。一些研究表明:断裂表面分形维数与材料的某些力学性质(如  $K_{IC}$ ,  $\Delta K_{th}$  等)之间存在某种关系,甚至认为分维可作为独立参数来表征材料的力学性质<sup>[1, 7, 12-17, 41]</sup>。苏燕等人<sup>[42]</sup>建立了材料断裂韧性与断裂表面分形维数的相关关系模型。结果表明,断裂韧性是分形维数、材料屈服强度、微结构尺寸及夹杂物体积分数等多参数的函数,并非只取决于分形维数。但也有许多研究表明用分维建立与传统力学性能参数之间关系时,会出现诸多矛盾<sup>[18, 19, 43]</sup>。

断口表面是材料断裂过程的最终结果,它其实包含了断裂过程中形变、裂纹萌生、裂纹扩展各个阶段的混合信息。因此用一个单一的常数来表征是不够的,分形维数应该是对过程的动态描述,它在断裂的不同阶段应有不同的变化规律。这一切都涉及到对分形本

质的认识。显然,在裂纹快速扩展前后存在不同的分形结构。分形维数不仅仅是一个描述分形体几何形状复杂程度的参数,从它的变化可反映长短裂纹间确实存在不同的断裂机制。

分形维数与常规断裂力学参数间并不存在一个普适对应的关系,它在材料的断裂过程中不是一个常数,而是随着裂纹扩展变化的,这种变化规律在一定程度上反映了裂纹的扩展规律。事实上,断裂过程是从纳观到宏观各种尺度上断裂协同作用的结果,应该从非平衡系统中耗散结构的自组织过程来作再认识。

断面分维仅是描述断口形貌特征参数,只有将其与下列问题联系在一起才有实际意义:

(1) 典型断口(包括解理、准解理、疲劳、沿晶与穿晶韧窝、蠕变等断口)的分形结构与特征。

(2) 加载方式(静载、疲劳、冲击等)及温度等外界环境对断口形貌与分形结构的影响。

(3) 材料成分与组织形态对断口形貌与分形结构的影响。

(4) 断口分形结构形成机制、分维的物理意义及其与相应力学性能的关系。

显然,要使分形理论在材料断裂领域中得到进一步应用还有许多艰苦的工作。但分形的概念是一个能用来描述断裂的极好工具,目前缺乏的是清晰的物理模型和数学支撑,对分形形成的动力学机制也很不了解,只有掌握更多相关的物理和数学知识,如非线性动力学理论、耗散结构理论等,与材料断裂机制结合起来才能有所突破。

## 5 结束语

(1) 分形理论在金属断裂方面的应用已取得了很大的进展,它将进一步丰富和完善金属断裂方面的理论研究,并为分形理论在其他领域的应用奠定良好的基础。

(2) 用分形理论来分析金属断裂表面,并建立起分形维数与金属宏观力学性能之间的关系有十分重要的意义。一旦建立正确的关系,就可能直接从金属破坏之后的断口分维分析来推测金属的断裂性质,这对于部件失效将有重要的意义。

(3) 金属断面分维与具体金属力学性能的具体关系存在不少的争议和分歧,有待进一步的探讨和研究。

### 参考文献

- [1] MANDELBROT B B, PASSOJA D E, PALLAYA J. Fractal character of fracture surfaces of metals [J]. Nature, 1984, 308 (19): 721-726.

- [2] DAUSKARDT R H, HAUBENSAK F, RITCHIE R O. On the interpretation of the fractal character of fracture surfaces[J]. *Acta Metall Mater*, 1990, 38(2): 143– 159.
- [3] UNDERWOOD E E, BANERJI K. Fractals in fractography [J]. *Mater Sci Eng*, 1986, 80(1): 1– 4.
- [4] PANDE C S, RICHARDS L R, SMITH S. Fractal characteristics of fractured surfaces [J]. *J of Mat Sci Letters*, 1987, 6(1): 295– 301.
- [5] RICHARDS L R, DEMPSEY B D. Fractal characterization of fractured surfaces in T+4. 5 Al-5. 0 Mg-1. 5[J]. *Scripta Met*, 1988, 22: 687– 689.
- [6] 穆在勤, 李淑清, 龙期威. 断裂表面不同方向的分形结构[J]. *材料科学进展*, 1990, 4(3): 247– 250.
- [7] 卢春生, 白以龙. 材料损伤断裂中的分形行为[J]. *力学进展*, 1990, 20(4): 468– 477.
- [8] LU C, MAI Y- W, BAI Y. Fractals and scaling in fracture induced by microcrack coalescence[J]. *Philosophical Magazine Letters*, 2005, 85(2): 67– 75.
- [9] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [J]. *Fractals*, 1993, 1: 117– 123.
- [10] 卢春生, 韩闻生, 白以龙, 等. 层裂的分形机理及分维和连接阈值的关系[J]. *力学学报*, 1995, 27: 28– 31.
- [11] KADANOFF L P. Fractals: where's the physics[J]. *Phys Today*, 1986, 39(2): 6– 7.
- [12] 魏成富, 李静媛, 严范梅, 等. 分形维数与 D6AC 钢的韧性[J]. *材料科学与工程*, 1995, 13(3): 36– 41.
- [13] 肖林, 顾海澄, 匡震邦. 铝- 4 合金高温疲劳断口分形特征二次电子扫描法研究[J]. *稀有金属材料与工程*, 1995, 24(2): 22– 26.
- [14] MECHOLSKY J J, PASSOJA D E, FEINBERG-RINGEL K S. Quantitative analysis of brittle fracture surfaces using fractal geometry [J]. *J Am Ceram Soc*, 1989, 72: 60– 65.
- [15] RUSS J C. *Fractal Surfaces* [M]. New York: Plenum Press, 1994.
- [16] HILL T J, MECHOLSKY J J, ANUSAVICE A J. Fractal analysis of toughening behavior in 3BaO. 5SiO<sub>2</sub> glass ceramics[J]. *J Am Ceram Soc*, 2000, 83(8): 545– 554.
- [17] MECHOLSKY J J, WEST J K, PASOJA D E. Fractal dimension as a characterization of free volume created during fracture in brittle materials[J]. *Philosophical Magazine A*, 2002, 82(17/18): 3163– 3176.
- [18] PANDE C S, RICHARDS L R, LONAT N, et al. Fractal characterization of fractured surfaces [J]. *Acta Metall*, 1987, 35(7): 1633– 1640.
- [19] BARAN G R, ROQUES-CARMES C, WEHBI D, et al. Fractal characteristics of fracture surfaces[J]. *J Am Ceram Soc*, 1992, 75(10): 2687– 2691.
- [20] 类维生, 陈丙森. 几种断裂问题的分形描述[J]. *高压物理学报*, 1994, 8(3): 166– 171.
- [21] 穆在勤, 李淑清, 龙期威. 断裂表面不同方向的分形结构[J]. *材料科学进展*, 1990, 4(3): 247– 250.
- [22] 苏辉, 张玉贵, 阎振繁. 金属冲击断口的分形分析[J]. *金属学报*, 1989, 25(6): A466– A468.
- [23] 龙起易, 朱祖铭, 穆在勤, 等. 马氏体相变的分形描述[A]. 辛厚文. 分形理论及其应用[C]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1993. 291– 295.
- [24] 类维生, 苏燕, 陈丙森. 裂纹扩展速率的分形模型[J]. *钢铁研究学报*, 1996, 8(4): 67– 68.
- [25] 孙力玲. 定向凝固高温合金晶界形貌的分形描述[J]. *金属学报*, 1994, 30(5): A200– A203.
- [26] 高峰, 谢和平. 几种断裂问题的分形描述中几个问题的商榷[J]. *高压物理学报*, 1996, 10(2): 141– 144.
- [27] LUNG C W. Fractal and the fracture of cracked metals[A]. PETERONERO L, TOSATTI E. *Fractals in Physics* [C]. Amsterdam: North-Holland, 1986. 189– 195.
- [28] 苏辉. 金属沿晶断裂表面的随机分形分析[J]. *科学通报*, 1991, (19): 1510– 1511.
- [29] XIE H. *Fractals in Rock Mechanics* [M]. Rotterdam: A. A. Balkema publishers, 1993. 20– 86.
- [30] 谢和平, 张永平, 宋晓秋. 分形几何: 数学基础与应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1991. 187– 200.
- [31] SURESH S. Fractal model of fatigue surfaces [J]. *Metall Trans*, 1983, 14A: 2375– 2381.
- [32] 谢和平, 黄约军. 分形裂纹扩展对疲劳行为的影响[J]. *机械强度*, 1996, 18(1): 1– 5.
- [33] 王有明, 孙国雄, 汤崇熙. 材料损伤断裂的分形模型[J]. *东南大学学报*, 1994, 24(4): 26– 31.
- [34] 章冠人. 韧性与脆性断裂的分形维数[J]. *爆炸与冲击*, 1996, 16(2): 117– 122.
- [35] HIROYUKI N. A fractal criterion for ductile and brittle fracture [J]. *J Appl Phys*, 1994, 75(6): 3220– 3222.
- [36] 丁晓峰, 王东瑾. 18Mn2CrMoB 合金钢的分形维数与断裂韧度关系[J]. *辽宁工学院学报*, 1995, 15(2): 1– 5.
- [37] 江来珠, 崔昆. 应用分形几何研究钢的冲击韧性与易切削相参数的相关性[J]. *金属学报*, 1992, 28(1): A27– A33.
- [38] 李学良, 林建新. 易切削钢冲击断口分维的随机分形分析[J]. *金属学报*, 1994, 30(8): A380– A384.
- [39] XIE H. Response for discussion on “ the fractal effect of irregularity of crack branching on the fracture. toughness of brittle materials” [J]. *Int J Fract*, 1994, 65(4): R71– R75.
- [40] 卢春生, 韩闻生, 柯孚久, 等. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致突变[J]. *力学进展*, 1995, 2(25): 145– 173.
- [41] GENADY P C, ALEXANDER S B. Fractal fracture mechanics, a review [J]. *Engng Fract Mech*, 1995, 51: 997– 1033.
- [42] 苏燕. 断裂韧性与断裂表面分形维数的相关性研究[J]. *钢铁研究学报*, 1997, 9(2): 53– 56.
- [43] 张济忠. 分形[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995. 57– 73.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50471109)

收稿日期: 2005-06-27; 修订日期: 2006-10-20

作者简介: 曹睿(1977-), 女, 讲师, 博士, 主要从事材料变形及断裂行为的研究. 联系地址: 兰州理工大学材料学院(730050)。