

# 边界元法分析功能梯度涂层材料

Analysis of Functionally Graded Coatings by  
Boundary Element Method

王远坤, 程长征, 胡宗军, 牛忠荣

( 合肥工业大学 土木建筑工程学院工程力学系, 合肥 230009)

WANG Yuan-kun, CHENG Chang-zheng, HU Zong-jun, NIU Zhong-rong  
( Department of Engineering Mechanics, School of Civil  
Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**摘要:** 在常规边界元法中引入几乎奇异积分的解析算法, 使边界元法可以分析涂层结构的强度。计算了在赫兹压力作用下, 各向同性涂层和功能梯度涂层两种涂层结构中的 Tresca 应力分布, 绘制了应力等值线图。计算发现使用各向同性涂层时, Tresca 应力的最大值出现在涂层和基体交界面上, 且在交界面上应力存在明显的不连续性。通过边界元法分析, 发现采用功能梯度涂层, 可以降低最大的 Tresca 应力值, 削减交界面上的应力不连续性。

**关键词:** 边界元法; 几乎奇异积分; 功能梯度涂层; Tresca 应力; 应力等值线

中图分类号: O343      文献标识码: A      文章编号: 1001-4381(2008)04-0061-04

**Abstract:** The analytic formulations of the nearly singular integrals were introduced into the boundary element method (BEM) of the coating structures. The strength of the coating structures under Hertzian type pressure was modeled by BEM. The isotropic and functionally graded coatings were considered, respectively. The Tresca stress contours in the coating structures were portrayed. The numerical results showed that there were stress discontinuities at the coating-substrate interface when the isotropic coating was used. The discontinuity could be attenuated when the isotropic coating was replaced by the functionally coating. In addition, the maximum value of Tresca stress in the coating could be reduced.

**Key words:** boundary element method; nearly singular integrals; functionally graded coating; Tresca stress; stress contour

功能梯度材料(Functionally Graded Materials)由于其优异的力学性能而在工程中得到广泛的应用<sup>[1]</sup>。功能梯度涂层是材料参数在涂层厚度坐标上成比例连续(或离散)变化的一种新型涂层。随着材料参数的梯度变化, 导致涂层的力学性能梯度变化, 从而实现对材料的强度、韧性、刚度等特性的人为设计和控制以适应不同应用的场合<sup>[2]</sup>。

一般说来, 构件中材料成分和性能的突变会导致明显的局部应力集中<sup>[3]</sup>。但如果从一种材料逐步过渡到另一种材料, 其应力集中就会大大地降低, 材料参数如何过渡就成了功能梯度材料涂层的基本设计问题, 特别是在选择涂层的材料以及涂层在整个结构中厚度的比例问题。目前一般采用试错法<sup>[4, 5]</sup>, 这种方法周期长、成本高, 有必要寻找一种数值模拟方法。

现有的涂层结构数值分析方法尚不成熟。由于涂层一般都较薄, 用有限元实体元分析时, 单元的剖分必

须协调, 以致单元数和自由度非常大, 计算工作量惊人甚至难以为继<sup>[6]</sup>。如果采用有限元板壳单元, 单元本身不能很好反映沿板壳法向的应力, 特别是层间的界面应力和横向剪切应力, 这些参数正是分析涂层界面裂纹产生扩展和涂层剥落的主要依据<sup>[7]</sup>。

边界元法仅需在边界剖分单元, 且几乎奇异积分障碍已被消除<sup>[8]</sup>, 用边界元法分析涂层计算量小且精度高。本研究将采用边界元法来分析功能梯度涂层结构, 计算结构内点的应力和涂层/涂层以及涂层/基体的交界面的应力。通过调整涂层的弹性常数达到削减交界面上应力不连续现象, 减小最大应力值, 为设计合理的功能梯度涂层提供借鉴。

## 1 涂层结构中的边界元法

若忽略体力, 弹性力学问题内点位移和应力边界

积分方程分别为

$$u_i(y) = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(x, y) t_j(x) - T_{ij}^*(X, y) u_j(x)] d\Gamma \quad (1)$$

$$Q_k(y) = \int_{\Gamma} [W_{ikj}^*(x, y) t_j(x) - S_{ikj}^*(s, y) u_j(s)] d\Gamma \quad (2)$$

方程中  $y$  为源点、 $x$  为场点;  $u_j, t_j$  分别为边界  $\Gamma$  上的位移和面力分量; 积分核  $U_{ij}^*(x, y), T_{ij}^*(x, y), W_{ikj}^*(x, y)$  和  $S_{ikj}^*(x, y)$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) 为基本解, 它们的表达式一般的边界元法书籍中都可以查到。对式(1), 令源点  $y$  趋于边界  $\Gamma$ , 则得到位移边界积分方程

$$C_{ij}(y) u_j(y) = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(x, y) t_j(x) - T_{ij}^*(x, y) u_j(x)] d\Gamma, y \in \Gamma \quad (3)$$

式中  $C_{ij}(y)$  为位移奇异性系数。

对涂层结构, 首先在涂层域和基体域分别列位移边界积分方程(3), 然后利用涂层(上标为  $f$ )和基体(上标为  $s$ )交界面上位移相等、面力连续的条件

$$u_k^f = u_k^s, t_k^f = -t_k^s \quad (k = 1, 2) \quad (4)$$

将涂层域和基体域内的边界积分方程联合起来, 可以求出边界和交界面上的所有未知量。再将所求得的边界点位移、面力值代入相应域的内点应力边界积分方程(2), 可以求出任意内点的应力, 这就是边界元法分析涂层结构的基本过程。

在对式(2-3)进行数值计算时, 将离散的边界单元从整体坐标系  $oxy$  转换到局部坐标系  $o\xi$ 。经观察发现, 在每个离散单元上, 式(2, 3)中的积分可以归结为以下三种形式

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{P_1(\xi)}{r^2} d\xi, I_2 = \int_{-1}^1 \frac{P_2(\xi)}{r^4} d\xi, I_3 = \int_{-1}^1 \frac{P_3(\xi)}{r^6} d\xi \quad (5)$$

式中:  $P_1(\xi), P_2(\xi), P_3(\xi)$  为局部坐标  $\xi$  的多项式形式,  $r = |x - y|$  为场点到源点的距离。

边界元法分析功能梯度涂层材料时, 根据不同的梯度层将涂层划分为若干个子域。涂层本身就非常薄, 剖分后每层就更薄了。因而边界元法计算时源点和场点的距离  $r \rightarrow 0$ , 则式(5)积分核的分母趋于零, 使得  $I_1$  和  $I_2$  存在几乎强奇异性、 $I_3$  存在几乎超奇异性, 常规的高斯积分计算式(5)将失效, 这就是常规边界元法不能分析功能梯度涂层的原因。

文献[8]通过反复的分部积分运算, 给出了式(5)的解析算式, 无需数值积分, 克服了几近奇异积分的难题, 使得边界元法可以分析含涂层的薄域结构。

## 2 各向同性涂层和功能梯度涂层比较

下面用处理了几近奇异积分的边界元法来计算在

赫兹压力下涂层构件内的应力分布。让涂层取各向同性材料和功能梯度材料两种情形来比较, 研究功能梯度材料的优势所在。

如图1所示, 涂层结构长度为  $L = 60\text{mm}$ , 厚度为  $t = 60\text{mm}$ , 涂层厚度为  $t^f$ 。下底边固定, 上边受赫兹压力  $p(x) = p_0(1 - (x/a)^2)^{1/2}$  作用, 其中最大载荷集度为  $p_0 = 1\text{MPa}$ , 荷载作用区域的半宽  $a = 1\text{mm}$ , 按平面应变问题考虑。涂层的弹性模量和泊松比用  $E^f$  和  $\nu^f$  表示, 基体的弹性模量和泊松比用  $E^s$  和  $\nu^s$  表示。

计算沿结构对称轴  $x/a = 0$  及  $x/a = 0.5, 1.0, 2.0$  处的 Tresca 应力

$$\tau = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (6)$$

同时观察涂层和基体交界面上  $\tau$  的变化, 其中,  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为第一、第二主应力。

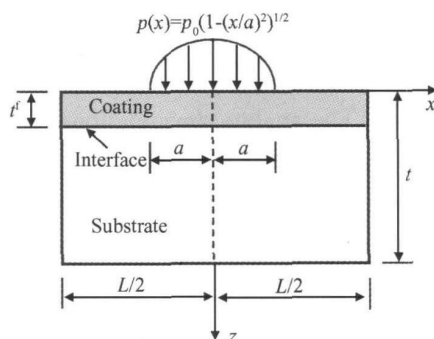


图1 涂层结构受赫兹压力作用

Fig.1 Specimen and contact condition

### 2.1 各向同性涂层

计算中在各向同性涂层结构中共划分 640 个节点 320 个二次等参元。

令涂层与基体的材料参数分别为:  $E^f = 390\text{MPa}$ ,  $\nu^f = 0.28$ ,  $E^s = 160\text{MPa}$ ,  $\nu^s = 0.2$ 。不同涂层厚度  $t^*$  时计算得到的 Tresca 应力  $\tau$  沿着结构对称轴的变化如图2所示。从图2中可以看出, 在涂层厚度  $t^* = 0.5$  时,  $\tau$  的最大值为  $0.36\text{MPa}$  出现在涂层和基体交界面上, 同时交界面上 Tresca 应力产生了较大的不连续, 这表明  $\tau$  在涂层内有比较大的梯度。在涂层厚度  $t^* = 0.1, 1.0, 2.0$  时, 亦有同样的现象发生。

图3给出了  $t^* = 0.5$  时, 涂层和基体内 Tresca 应力的等值线图, 从图中可以看出最大的 Tresca 应力等值线为  $\tau = 3.0\text{MPa}$ , 这条等值线除了出现在赫兹压力中心  $x/a = 0$  下的基体内, 同时也出现在赫兹压力边缘  $x/a = \pm 1$  下方的涂层内。

图4描绘的是距赫兹压力中心不同距离处的 Tresca 应力值  $\tau$ , 由图可以看出接触中心下方交界面

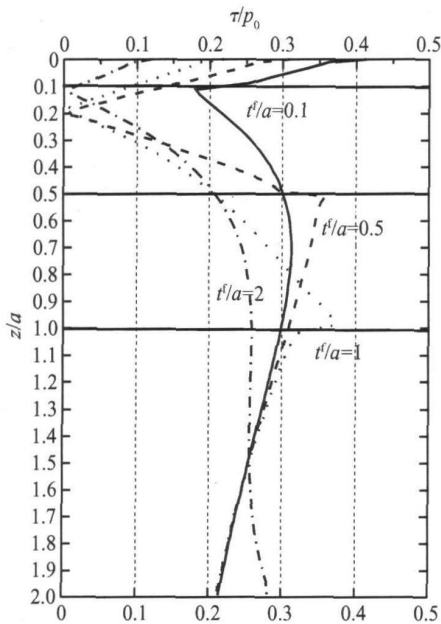


图2 涂层厚度变化时,  $\tau$  沿构件对称轴的变化  
Fig. 2 Depth line profiles of the resolved, at the contact center

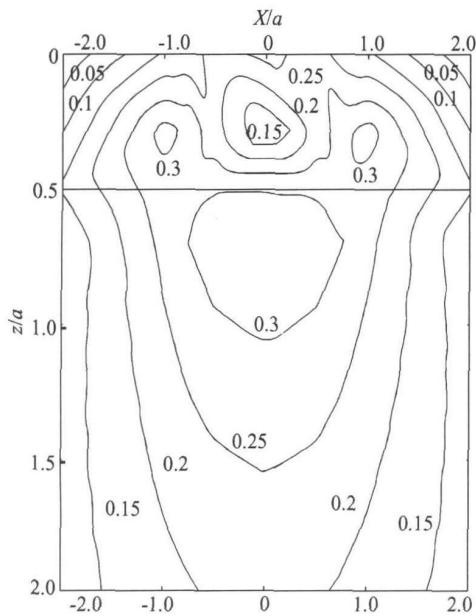


图3 各向同性涂层结构中  $\tau$  等值线 ( $t^* = 0.5$ )  
Fig. 3 Contour plots of the dimensional resolved  $\tau$  at the center. Homogeneous coating;  $t^* = 0.5$

上  $\tau$  的导数不连续性更加突出, 这表明赫兹压力接触中心下方的涂层和基体交界面上更易发生裂纹破坏。

2.2 功能梯度涂层

取涂层厚度  $t^* = 0.5$ , 将其等分为五层, 令各层的材料参数按一定的规律变化来构造功能梯度涂层。设基体的弹性模量取 160GPa, 最外层涂层的弹性模量为 390GPa, 功能梯度涂层各层的弹性模量自基体向表面按图 5 所示的指数规律变化。基体的泊松比  $\nu = 0$ ,

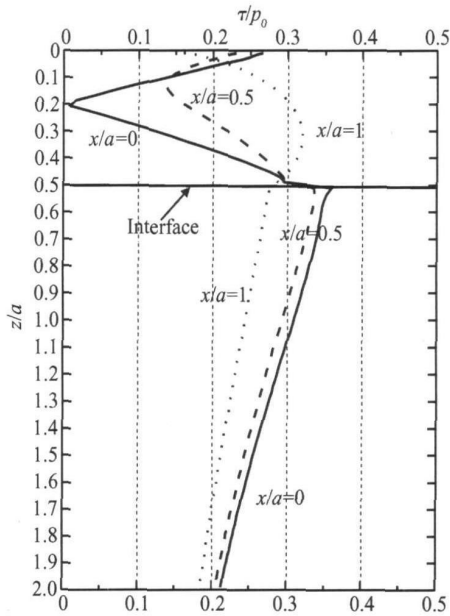


图4 各向同性涂层结构中  $x/a = 0, 0.5, 1.0$  上的  $\tau$  值 ( $t^* = 0.5$ )  
Fig. 4 Homogeneous coating;  $\tau$  at the center.  
 $t^* = 0.5$  Lateral distance from the contact center  $x/a = 0, 0.5, 1.0$

各涂层泊松比皆取  $\nu = 0.28$ 。边界元法在功能梯度涂层结构中共划分了 2160 个节点 1080 个二次等参元。

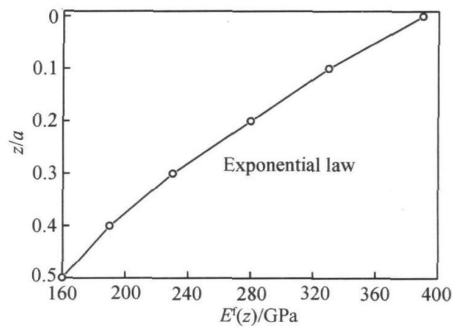


图5 功能梯度涂层各层的弹性模量  
Fig. 5 Exponential law for modulus variations of a graded coating/substrate

图 6 给出了赫兹压力下功能梯度涂层和基体内点的应力等值线图, 同图 3 采用各向同性涂层内点应力等值线比较, 赫兹压力边缘  $x = \pm a$  下涂层内的两个  $\tau = 0.3 \text{ MPa}$  的应力等值线消失了。

图 7 描绘的是距赫兹压力中心不同距离处的 Tresca 应力值  $\tau$ , 同各向同性涂层结果图 4 比较, 在功能梯度材料涂层内主要的变化是赫兹压力边缘下 ( $x/a = 1$  处)  $\tau$  值变化梯度趋缓,  $\tau$  的最大值被削减, 同时最大值的位置向涂层表面移动。在涂层和基体交界面上, Tresca 应力分布的不光滑幅度有所降低。由此可

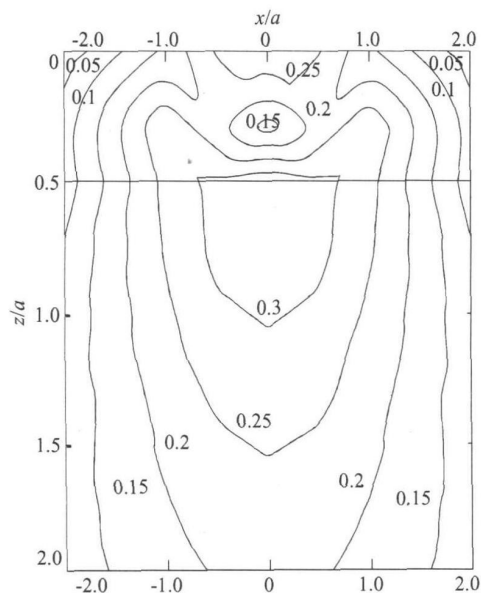


图 6 功能梯度涂层结构中  $\tau$  等值线 ( $t^* = 0.5$ )

Fig. 6 Contour plots of the dimensional resolved  $\tau$  at the center, graded coating;  $t^* = 0.5$

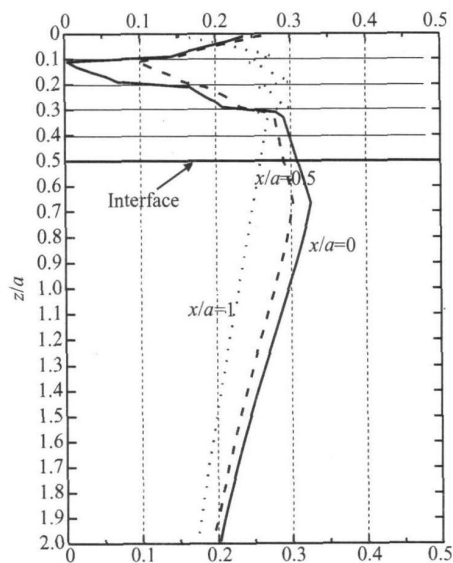


图 7 功能梯度涂层中  $x/a=0, 0.5, 1.0$  上  $\tau$  值 ( $t^* = 0.5$ )

Fig. 7 Lateral distance from the contact center  $x/a=0, 0.5, 1.0$  Graded coating;  $\tau$  at the center,  $t^* = 0.5$

可以成功分析涂层结构。并模拟了在赫兹压力下涂层构件内 Tresca 应力的变化, 通过应力等值线的形式给出了数值分析的结果。

(2) 对于各向同性涂层, 取基体的弹性模量为 160MPa, 涂层的弹性模量为 390MPa, 在涂层和基体的交界面上容易发生破坏; 采用功能梯度涂层后, 将涂层细分为 5 层, 基体的弹性模量仍取 160MPa, 最外层涂层的弹性模量取 390MPa, 中间涂层的弹性模量从基体向外表面按指数规律过度, 这样构造的功能梯度材料涂层使得 Tresca 应力在涂层和基体内都得到削减。另外, 在涂层和基体的交界面上的 Tresca 应力不光滑现象也得到的改善。

### 参考文献

- [1] 渠海刚, 方建成, 赵紫玉, 等. 等离子熔射制备功能梯度涂层及其应用进展[J]. 航空精密制造技术, 2006, 42(5): 31-34.
- [2] 王鲁, 李雪利, 王富趾, 等. 功能梯度材料表面分形维数的研究[J]. 材料工程, 2001, (11): 25-27.
- [3] 冯忆艰, 桂长林, 王虎, 等. 功能梯度涂层材料的研究进展[J]. 合肥工业大学学报, 2004, 27(2): 153-157.
- [4] 吴臣武, 陈光南, 张坤, 等. 涂层/基体体系的界面应力分析[J]. 固体力学学报, 2006, 27(2): 203-206.
- [5] KOUITAT R, CONSIGLIO R, VON STEBUT J. Boundary element modeling of a coating-substrate composite under an elastic, Hertzian type pressure field: cylinder on flat contact geometry [J]. Surface and Coatings Technology, 1998, 102: 138-147.
- [6] KOUITAT R, CONSIGLIO R. Boundary element numerical modeling as a surface engineering tool: application to very thin coatings [J]. Surface and Coatings Technology, 1999, 116-119: 573-579.
- [7] 张永康, 孔德军, 冯爱新, 等. 涂层界面结合强度检测研究: 涂层结合界面应力的理论分析[J]. 物理学报, 2006, 55(6): 2897-2900.
- [8] 牛忠荣, 王左辉, 胡宗军, 等. 二维边界元法中几乎奇异积分的解析法[J]. 工程力学, 2004, 21(6): 113-117.

基金项目: 教育部博士学科点基金(20050359009); 安徽省自然科学基金资助项目(050440503)

收稿日期: 2007-05-30; 修订日期: 2007-11-15

作者简介: 王远坤(1982—), 男, 硕士研究生, 主要从事工程结构数值模拟与 CAD 的研究, 联系地址: 合肥工业大学南区 215 信箱. E-mail: wanguyankun2002@163.com

见, 功能梯度涂层可以减小涂层和基体交界面上发生裂纹破坏的可能。

## 3 结论

(1) 引入几乎奇异积分的解析算法, 使得边界元法