

# 基于拉伸、压缩、剪切单轴强度试验值的材料三参数广义强度准则

Three-parameter Generalized Failure Criteria Based on Tension, Compression and Shear Uniaxial Strength

陈秀华<sup>1</sup>, 胡 培<sup>2</sup>, 汪 海<sup>1</sup>

(1 上海交通大学 空天科学技术研究院, 上海 200240;

2 Evonik Degussa 上海有限公司高性能聚合物部, 上海 201108)

CHEN Xiu-hua<sup>1</sup>, HU Pei<sup>2</sup>, WANG Hai<sup>1</sup>

(1 Institute of Aerospace Science & Technology, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;

2 Performance Polymers, Evonik Degussa (Shanghai) Co. Ltd., Shanghai 201108, China)

**摘要:** 基于材料的第一应力不变量和应力偏张量第二应力不变量, 给出了同时考虑拉伸、压缩、剪切强度参数影响下的三参数广义强度准则。该强度准则公式严格满足纯拉伸、纯压缩、纯剪切情况下的强度值, 在物理意义上体现了静水压力和静水拉力对材料强度的不同影响和剪切强度对应力偏张量的影响。基于此三参数广义强度准则, 讨论了材料在各种典型应力状态下的强度包线, 并同传统的强度准则进行了比较分析。最后, 以 ROHACELL 闭孔 PMI 泡沫为例, 给出了三种典型泡沫材料的强度破坏包线曲线和试验验证数据, 比较结果证明, 采用该强度准则可以较好地预测 ROHACELL 刚性泡沫材料的破坏强度。

**关键词:** 应力不变量; 三参数; 广义强度准则; 强度破坏包线; 刚性泡沫

中图分类号: V214.8; 0346.1 文献标识码: A 文章编号: 1001-4381(2009)10-0001-06

**Abstract:** Based on the spherical tensor invariant and the deviator tensor invariant, a three-parameter generalized failure criteria was obtained based on the tension, compression and shear uniaxial strength value. This generalized failure criteria satisfy the pure tension, pure compression and pure shear test strictly. The criteria incorporate both the hydrostatic tensor influence and the octahedral shear tensor. Then, some typical stress states are discussed and compared the strength envelope among the 3-P generalized failure criteria to the common criteria. Also three types ROHACELL PMI foam material strength test are presented to support the criteria, and confirmed that this criteria is more suitable for describing the material failure envelope of ROHACELL PMI foam material.

**Key words:** tensor invariant; three-parameter; generalized failure criteria; strength envelope; PMI foam

强度准则是用来判断材料在复杂受力状态下何时破坏的理论, 是工程上用来对结构强度进行评价的破坏准则。

通常定义一个一般性的强度准则的构造理念如下:

- (1) 强度准则中各项参数具有一定的物理意义;
  - (2) 强度准则具有简单的表达式, 各参数项的系数最好由简单试验来确定, 强度包线在简单受力状态下同试验结果完全符合;
  - (3) 各项参数的系数在多轴受力状态下适当拟合和近似简化。
- 强度理论研究进行了上百年, 在持续不断发展的

进程中, 基于各向同性材料的本构, 提出了几大经典强度理论。目前应用比较广泛的主要为最大主应力理论, 等效应力通常用  $\sigma_1$  表示; 最大剪应力理论, 在塑性材料力学中通常称之为 Tresca 屈服准则, 等效应力通常用  $\tau_{re}$  表示; 八面体剪应力理论, 通常称之为 Von Mises 屈服准则, 等效应力用  $\sigma_{vm}$  表示。我国著名学者俞茂宏早在 1961 年也曾提出了著名的双剪强度屈服准则<sup>[1]</sup>, 后来又把他推广形成了统一屈服准则<sup>[2]</sup>。除最大主应力外, 以上所有基于剪切理论的屈服准则均包含以下两种假设:

- (1) 静水应力不影响材料的屈服;
- (2) 材料的拉压屈服应力相等。

沈珠江<sup>[3]</sup>对 30 多年来建议过的有关平面和子午面的各种破坏准则和屈服函数的表达式进行分类和归纳总结。

针对混凝土材料等结构材料在拉、压受力情况下表现出来的强度不同,大量学者对此现象进行了众多的考虑多参数的广义强度准则研究。

Gibson, Ashby, Triantafillou 等人建立了泡沫结构的细观本构模型,对单胞引入相对密度参数进行等效力学计算,给出了几个基于单轴最大拉伸强度下的材料破坏强度准则,以 GT 模型和 GAZT 模型<sup>[4-6]</sup>为代表。

著名 Mohr-Coulomb 强度准则考虑了 1 个最大主剪应力及其面上相应的正应力,是一种广义的单剪强度理论。之后许多学者如 Sander, , , E. Hoek 等对其进行了修正和改写<sup>[7]</sup>。

从 1925 年 Schleicher 开始,绝大多数科学家都在致力于研究广义的三剪强度准则。其中具有典型代表性的为 Drucker-Prager 模型<sup>[8,9]</sup>,其在等效应力表达式中对 Von Mises 应力增加了静水压力的线性项,也可以表述为第二应力偏张量加上第一应力球张量不变量的加权。Deshpande 和 Fleck<sup>[10]</sup>则通过对 Von Mises 应力的二次项和静水压力的二次项的线性叠加给出了金属泡沫结构的强度屈服准则。

Miller 通过引入静水压力的线性项以及静水压力的二次项来构造屈服准则模型,是考虑了材料的纵横塑性纵横应变比率,给出了金属泡沫材料的屈服准则<sup>[11]</sup>。

俞茂宏等基于前面所做的双剪强度理论,引入静水压力的影响,通过材料拉压强度比系数  $m$  对其进行修正,给出了适用于拉压强度不等的材料广义双剪强度准则<sup>[7]</sup>。还有一些学者通过引入其他应力参数,例如第三应力球张量不变量来对强度准则进行修正。

这些强度准则考虑了材料拉压强度不等的情况,通过静水压力来对强度准则进行修正,但这些准则均认为剪切强度是不独立的,仅仅给出了适用的剪切强度极限状况,没有单独考虑剪切强度的影响。

Li 和 Mines<sup>[12]</sup>, Benderly 和 Putter<sup>[13]</sup>等在研究 ROHACELL 材料破坏试验时,指出了考虑剪切和压缩强度时应该建立一个单独的椭圆方程。即需要考虑材料的剪切强度,但是该强度准则因为引入了标准的椭圆方程,因此没有考虑材料的拉压强度不等。

为了考虑更一般性的强度准则,科学家提出了三参数准则甚至多参数准则。例如在单剪双参数准则基础上再考虑静水应力函数后可以得到单剪的三参数准则。Bresler 和 Pister<sup>[14]</sup>早在 1957 年就提出了基于八

面体剪应力和考虑静水压力的广义三参数强度准则。俞茂宏根据他本人曾提出的双剪强度理论结合静水压力给出了广义的三参数准则<sup>[15]</sup>。但是,所有这些广义的三参数强度准则以及多参数准则均存在一个普遍的问题,就是在进行三参数推导时是同时考虑双轴等压缩强度、单轴压缩强度以及单轴拉压强度不等的因素。因为构造理念决定了几个强度准则公式在进行参数确定的时候需以单轴拉伸、单轴压缩和双轴等压强度试验来确定。因为众所周知的原因,进行双轴等压强度测试难度比较大,因此这类准则确定方法难度及需要的试验花费比较大。

材料破坏是基于一定的破坏机理的,非密实的材料(通常称之为多孔介质)的破坏机理是非常复杂的。以 Gibson, Ashby 为代表的很多科学工作者通过考虑材料细观结构单胞中的弹性屈曲、塑性屈服和脆性压损或者断裂等来构造材料的屈服面<sup>[16]</sup>。这种强度准则的构造方法至少存在两个难点:(1)基于周期性微结构单胞模型总是与实际材料的微结构有偏差,因此必须采用修正系数来进行修正。而修正系数只能通过宏观的强度试验来完成,这样经过修正后的模型虽然从物理意义上比直接的宏观修正模型更能说明问题,但使用起来比较麻烦。(2)因为考虑了材料微结构的屈曲,变形等因素,因此在材料屈服本构模型中包含有材料的刚度参数和材料的形状几何参数,例如基体材料的弹性模量、相对密度等等。而事实上这些材料参数,例如材料的刚度参数也存在拉压剪独立的问题,这样通过力学性能的计算反应出的材料强度破坏值与真实试验还是会有偏差的。因此,基于宏观材料强度的准则方程在工程上更具有普遍适用性。

本工作构造一个广义强度准则,该强度准则的参数全部基于单轴试验试验来确定。从材料强度性质的广泛意义上来说,一种材料具有多少种不同的单轴强度值,在定义其广义强度准则时就可以引入等量的参数。对于泡沫和土壤等材料来说,其单轴强度值通常有单轴拉伸、单轴压缩以及单轴剪切强度三个不同的值,因此可以构造三参数广义强度准则。

对于空间任意角度,从空间任意一个坐标系上切出来的泡沫和土壤等材料的微元体表现出来材料破坏形式是一样的,对于这种类型材料建立的强度准则应该是不依赖于材料坐标系的,因此最好采用应力不变量的形式表达。

本工作将基于三剪强度理论为基础,引入静水压力的影响,构造三参数广义强度准则,所有参数是通过单轴拉伸、单轴压缩以及单轴剪切强度值来确定。

定义:  $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

$$J_2 = \frac{1}{3} [ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) ] = \frac{1}{3} \sigma_{\text{von}}^2$$

## 1 满足拉、压独立影响的双参数强度准则

为了使得屈服函数在拉、压应力状态下具有相等函数值,先构造一个纯数学函数  $F(x)$ ,使得这个函数满足边界条件:

$$F(x) = X_t (x = X_t) \quad (1)$$

$$F(x) = X_c (x = -X_c) \quad (2)$$

$$\text{令: } F(x) = g(x) + h(x) \quad (3)$$

其中  $g(x)$  为  $x$  的偶函数,  $h(x)$  为  $x$  的奇函数, 一个简单的定义为:

$$g(x) = \sqrt{q(x)^2} \quad (4)$$

$$q(x) = (1 + m)x \quad (5)$$

$$h(x) = (1 - m)x \quad (6)$$

将  $X = X_t$  带入以上公式, 有  $\frac{1}{2}$

将  $X = X_c$  带入以上公式, 有  $\frac{X_t}{X_c}$

要满足拉、压强度不等时等效屈服应力相等, 需要在  $\sigma_{11}$  的单轴上定义一个函数

令  $m = \frac{X_t}{X_c}$ , 将  $\frac{1}{2}$  代入, 有

$$F(x) = \sqrt{\frac{1}{4}(1+m)^2 x^2} + \frac{1}{2}(1-m)x \quad (7)$$

引入应力不变量,  $I_1$  为应力的奇函数,  $I_2$  为应力的偶函数, 根据前面对  $g(x)$  和  $h(x)$  的一般性定义, 将 (7) 式子中的  $x$  推广到所有方向, 定义  $e$  为等效应力, 可以构造函数:

$$e = \sqrt{\frac{1}{4}(1+m)^2 J_2} + \frac{1}{2}(1-m)I_1 \quad (8)$$

(8) 式可作为不考虑剪切独立项以及材料的拉、压强度不等时的材料等效应力方程。

## 2 满足拉、压、剪独立影响的三参数强度准则

现在考虑剪切强度独立对强度屈服函数的影响。根据一般性经验, 各向同性假设中, 剪切强度  $S$  和拉伸强度  $X_t$  的关系满足  $n = \frac{X_t}{\sqrt{3}S} = 1$ , 现在需要考虑  $n$

1 时的情况。可以考虑得一个办法就是对 (8) 式子进行修正, 将  $n$  引入。由于 (8) 式中含  $I_1$  项均不包含剪切应力项, 因此为了满足 (8) 式在纯剪切情况下的单轴

条件完全满足要求, 必需先对  $J_2$  项进行修正, 引入修正系数。因为修正后会多出来一个正应力项函数, 因此再通过不含剪应力项的  $I_1$  进行反修正。

对于  $J_2$  来说, 每一个  $3J_2$  本身所含的正应力和一个  $I_1^2$  所含的正应力项系数相等, 因此(这些条件仅在单轴状态下完全满足), 因此有:

$$e = \sqrt{\frac{1}{4}(1+m)^2 3J_2 - \frac{1}{4}(1+m)^2 I_1^2 + \frac{1}{4}(1+m)^2 I_1^2} + \frac{1}{2}(1-m)I_1 \quad (9)$$

为了求解系数, 首先, 考虑 12 方向纯剪切破坏时,

即  $\sigma_{12} = S$  时, 定义  $n = \frac{X_t}{\sqrt{3}S}$ , 有

$$e = \sqrt{\frac{1}{4}(1+m)^2 3J_2} = \frac{\sqrt{(1+m)}\sqrt{3}S}{2} = X_t \quad (10)$$

$$\text{求解 (10)} \quad = \frac{4n^2}{(1+m)^2} \quad (11)$$

将 代入 (9) 式子中

$$e = \sqrt{3n^2 J_2 + [\frac{1}{4}(1+m)^2 - n^2] I_1^2} + \frac{1}{2}(1-m)I_1 \quad (12)$$

(12) 式即为基于拉、压、剪单轴强度值确定的三参数强度准则等效应力方程。在任何应力状态下, 当等效应力值大于材料的单轴拉伸极限强度时材料失效。

三参数方程的物理意义:

尽管三参数强度准则是从数学上推导出来的, 属于唯象的基于实验结果的强度准则, 但其具有明确的物理力学意义。

公式 (12) 中  $J_2$  项反映了应力偏张量, 也可以称 Von Mises 应力项,  $I_1$  项反映了应力球张量, 也可以称静水应力项。如果把  $I_1, J_2$  看作一个广义的张量坐标轴, 则该三参数准则的意义就是在  $I_1$  坐标轴上体现了静水压力和静水拉力对材料强度的不同影响, 在  $J_2$  坐标轴上体现了剪切强度对应力球张量影响。

德国聚合物研究所 (DKI) 的 Kolupaev 和 EVON-IC DEGUSSA 公司 Roth 等人对 ROHACELL 泡沫进行了大量的强度试验研究, 曾给出了适用于 ROHACELL 壁孔泡沫的强度准则<sup>[17]</sup>。而本研究给出的准则公式比 Kolupaev 和 Roth 给出的要简单得多, 而且准则中各项所代表的物理意义更加明确。

## 3 三参数强度准则在各种典型应力状态下的描述

### 3.1 纯拉伸受力情况

考虑 11 方向纯拉伸情况, 有:  $\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12}$

$= \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ , 此时  $3J_2 = I_1^2 = \sigma_{11}^2$ ,  $I_1 = \sigma_{11}$ , 带入公式 (12) 有:  $\sigma_e = \sigma_{11}$ , 当  $\sigma_{11} = X_t$  的时候,  $\sigma_e = X_t$

纯拉伸时,  $\sigma_1 = \sigma_{\text{von}} = \sigma_{\text{tre}} = X_t$

可以看出, 当纯拉伸时, 主应力准则、Von Mises 屈服准则以及 Tresca 屈服准则与三参数准则是一致的。

### 3.2 纯压缩受力情况

考虑  $\sigma_{11}$  方向纯压缩情况, 有:

$\sigma_{11} < 0$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ , 此时  $3J_2 = I_1^2 = \sigma_{11}^2$ ,  $I_1 = \sigma_{11}$ , 带入公式 (12), 注意, 材料纯压缩时候  $\sigma_{11}$  值为负, 因此 (12) 式中根号开出来那一项应该为负值。

$\sigma_e = -m \sigma_{11}$ , 当  $\sigma_{11} = X_c$  的时候,  $\sigma_e = X_t$

纯压缩时,  $\sigma_1 = \sigma_{\text{von}} = \sigma_{\text{tre}} = X_c$

可以看出, 当纯拉伸时, 主应力准则、Von Mises 屈服准则以及 Tresca 屈服准则是一致的, 但与三参数准则相比, 其值为三参数准则的  $\frac{1}{m}$  倍。对于一个拉伸强度大于压缩强度的材料来说, 如果按照主应力准则、Von Mises 屈服准则或者 Tresca 屈服准则计算, 在压缩强度点处的值, 三个准则都为不破坏, 而实际上这一点为材料的破坏点, 而采用三参数准则就可以体现这一破坏点。

### 3.3 纯剪切受力情况

考虑  $\tau_{12}$  方向纯剪切受力情况, 有:

$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ , 此时  $J_2 = \tau_{12}^2$ ,  $I_1 = 0$  带入公式 (12) 得到  $\sigma_e = \frac{X_t}{S} \tau_{12}$ , 当  $\tau_{12} = S$  的时候,  $\sigma_e = X_t$

纯剪切时,  $\sigma_1 = S$ ,  $\sigma_{\text{von}} = \sqrt{3}S$ ,  $\sigma_{\text{tre}} = 2S$

可以看出, 当纯剪切时, 主应力准则、Von Mises 屈服准则以及 Tresca 屈服准则与强度破坏值有差别。对于主应力准则来说, 除非拉伸强度等于纯剪切强度值, 准则才相符; Tresca 屈服准则则满足拉伸强度等于 2 倍剪切强度条件; Von Mises 屈服准则满足各项同性的一般性屈服条件, 即剪切强度为拉伸强度的  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  倍时成立; 三参数准则满足了剪切屈服条件。

### 3.4 平面内拉伸剪切耦合受力情况

考虑  $\sigma_{11}$  方向拉力和  $\tau_{12}$  方向剪切耦合受力情况, 有:

$\sigma_{11} > 0$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$   
此时,  $I_2 = \sigma_{11}^2 + 3\tau_{12}^2$ ,  $I_1 = \sigma_{11}$ , 代入 (12) 式得到:

$$\sigma_e = \sqrt{3n^2 \tau_{12}^2 + \frac{1}{4}(1+m)^2 \sigma_{11}^2} + \frac{1}{2}(1-m) \sigma_{11} \quad (13)$$

公式 (15) 是材料在平面内拉剪耦合受力情况下的等效应力公式。其强度包线是过  $\sigma_{11} = X_t$  和  $\sigma_{12} = S$  的一个特殊曲线, 在此包线上的所有点对应的等效应力值  $\sigma_e = X_t$ 。

下面对公式 (13) 进行数学转换。

$$\left[ \sigma_e - \frac{1}{2}(1-m) \sigma_{11} \right]^2 - \frac{1}{4}(1+m)^2 \sigma_{11}^2 = 3n^2 \tau_{12}^2 \quad (14)$$

$$\sigma_e^2 - m \sigma_{11}^2 - (1-m) \sigma_{11} \sigma_e = 3n^2 \tau_{12}^2 \quad (15)$$

$$\frac{\left[ \sigma_{11} + \frac{(1-m) \sigma_e}{2m} \right]^2}{\left[ \frac{(1+m) \sigma_e}{2m} \right]^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\left[ \frac{(1+m) \sigma_e}{\sqrt{12mn^2}} \right]^2} = 1 \quad (16)$$

显然, (16) 式在  $\sigma_e = X_t$  时为一个椭圆方程。

同时可以证明, 当  $\tau_{12} = 0$  时,  $\sigma_{11}$  可以得到两个解,

$\sigma_{11} = \sigma_e$  或者  $\sigma_{11} = \frac{\sigma_e}{m}$  均满足 (16) 式方程, 这也就证明了 (16) 式也满足压缩和剪切耦合作用时的包线方程。

令  $\sigma_e = X_t$ ,  $X_c = \frac{X_t}{m}$ ,  $S = \frac{X_t}{\sqrt{3n}}$  代入 (16) 式, 则 (16)

式可转换成:

$$\frac{\left( \sigma_{11} - \frac{X_t - X_c}{2} \right)^2}{\left( \frac{X_t + X_c}{2} \right)^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\left( \frac{(X_t + X_c)S}{2\sqrt{X_t X_c}} \right)^2} = 1 \quad (17)$$

(17) 式比较方便理解, 在物理意义上体现了将一个标准的椭圆方程在  $\sigma_{11}$  坐标轴上进行偏移, 使得强度包线通过拉伸强度点  $X_t$  和压缩强度点  $X_c$ , 同时在  $\tau_{12}$  坐标轴上对椭圆方程进行缩放, 使得该曲线通过剪切强度点  $S$ 。因此可知, 该平面内的强度包线是在考虑拉伸强度的 Von Mises 强度包线和考虑压缩强度的 Von Mises 强度包线中间的一个椭圆曲线。该椭圆曲线和两个 Von Mises 曲线在拉伸和压缩强度点上相切。需要说明的是, 按照 Von Mises 屈服准则, 剪切强度值  $S = \frac{X_t}{\sqrt{3}}$ , 但是本研究给出的强度准则并没有规

定剪切强度的取值范围, 也就是说  $S$  可以为任意值。因此以下图 1 中给出的在拉剪或压剪耦合作用下  $\sigma_{11}-\tau_{12}$  平面内的三条强度包线图在理论上都是有可能的 (这里假设  $X_t > X_c$ ), 该三条强度包线分别对应了 3 种可能的材料形式。 (1)  $S > \frac{X_t}{\sqrt{3}}$ ; (2)  $\frac{X_c}{\sqrt{3}} < S < \frac{X_t}{\sqrt{3}}$ ;

(3)  $S < \frac{X_c}{\sqrt{3}}$ 。由于材料在各个方向的一致性, 可以认为, 在其他平面内其拉剪-压剪强度包线图一样。

### 3.5 静水压力和静水拉力受力情况

考虑材料受到三个方向静水压力作用,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} =$

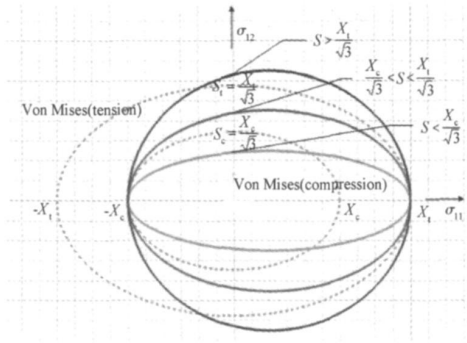


图 1  $\sigma_{11}-\sigma_{12}$  平面内材料的强度包线图

Fig. 1 Failure criteria envelope in  $\sigma_{11}-\sigma_{12}$  coordinate

$\sigma_{33} = p$  (这里静水压力  $p$  为负值),  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ , 此时  $J_2 = 0$ ,  $I_1 = 3 \sigma_{11} = 3p$  代入公式(12), 有

$$e = 3 \sqrt{\frac{1}{4}(1+m)^2 - n^2 - \frac{1}{2}(1-m)J(-p)} \quad (18)$$

同理, 如果  $p$  为正, 则有

$$e = 3 \sqrt{\frac{1}{4}(1+m)^2 - n^2 + \frac{1}{2}(1-m)Jp} \quad (19)$$

(18) 式中  $-p$  项和(19)式中  $p$  项前面的系数项体现了三参数强度准则中静水压力和静水压力的影响系数。按照最大主应力准则, 该系数为 1, 而按照 Von Mises 屈服准则以及 Tresca 屈服准则为 0, 也就是按照 Von Mises 屈服准则以及 Tresca 屈服准则, 在静水压力或者静水拉力作用下, 材料永远不会破坏, 这显然与事实严重不符, 而本研究给出的三参数准则考虑了静水压力和静水拉力对材料强度的不同影响。

3.6 静水压力为 0 的受力情况

考虑材料受静水压力为 0 的情况,  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$ , 此时  $I_1 = 0$ , 代入公式(12), 有

$$e = \sqrt{3n^2 J_2} = n_{\text{von}} \quad (20)$$

可见, 当静水压力为 0 时, 该方程退化成了对 Von Mises 屈服应力的简单线性比例修正。事实上非常容易理解纯剪切情况就是静水压力为 0 情况时的一种特例。

4 三参数强度准则的适用范围及特点

三参数强度准则强调了强度值不依赖于方向性的均匀材料, 通常像金属材料、泡沫材料、土壤材料、塑料等这样的材料符合均匀性条件的材料。

三参数强度准则方程是建立在三剪强度理论上并考虑静水压力的影响构造出来的, 因此本研究在拉剪平面内, 其强度包线为椭圆方程, 该椭圆方程通过

剪切强度点, 但是, 材料破坏时对应的剪应力最大点并不在纯剪切状态。也就是说, 拉压应力作用下对剪切强度产生了影响。以拉伸强度大于压缩强度为例, 按照三参数强度准则, 多轴状态下, 其最大剪切应力点略高于纯剪切时试验测定的剪切强度值。通过 3.4 中的(17)式可知, 按照三参数强度准则, 材料破坏时对应的最大剪应力应为:  $\frac{(X_t + X_c)S}{2\sqrt{X_t X_c}}$ , 也就是说在拉压应力影响作用下材料剪切强度值比纯剪切应力下大。

5 三参数强度准则在 ROHACELL 闭孔泡沫材料中的应用

表 1 给出了 ROHACELL 泡沫材料 51WF, 110WF, 200WF 的单轴强度值。

表 1 ROHACELL 材料的单轴强度值  
Table 1 Uniaxial strength of ROHACELL

Material type	Tension $X_t$ / MPa	Compression $X_c$ / MPa	Shear $S$ / MPa
51WF	1.3	0.8	0.6
110WF	3.7	3.6	2.4
200WF	5.5	7.0	4.2

根据本工作提供的强度准则, 图 2-4 分别给出了三种 ROHACELL 材料的强度破坏包线及相应的单轴和多轴试验结果。

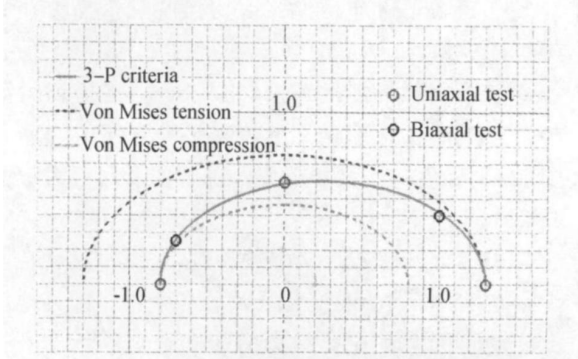


图 2 ROHACELL 51WF 强度包线图

Fig. 2 Failure criteria envelope of ROHACELL 51WF

通过 ROHACELL 闭孔泡沫强度破坏包线与强度试验值的比较, 可以看出该强度准则对 ROHACELL 泡沫材料非常适用。

以上图中所有用到的 ROHACELL 材料性能数据由 Evonic Degussa 公司及德国高分子材料研究院 (DKI) 完成。

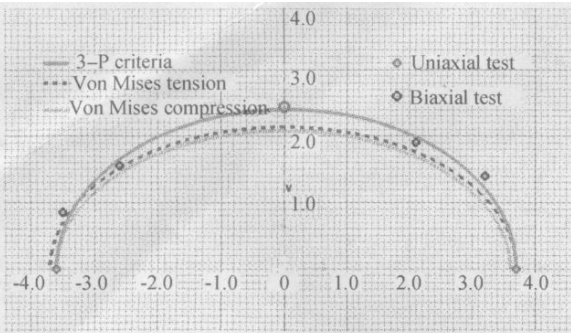


图 3 ROHACELL110WF 强度包线图

Fig. 3 Failure criteria envelope of ROHACELL110WF

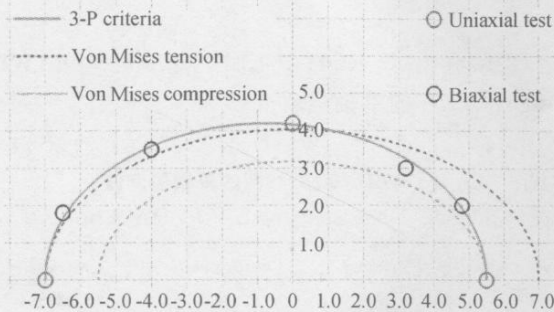


图 4 ROHACELL200WF 强度包线图

Fig. 4 Failure criteria envelope of ROHACELL200WF

## 6 结论

(1) 本工作基于三剪强度理论, 引入静水压力的影响, 构造了考虑了拉伸、压缩、剪切强度三个参数独立影响的三参数广义强度准则。

(2) 该准则严格满足纯拉伸、纯压缩、纯剪切情况下的强度试验, 在物理意义上体现了静水压力和静水拉力对材料强度的不同影响以及剪切强度对应力偏张量的影响。

(3) 基于此三参数广义强度准则, 讨论了材料在各种典型受力条件下的强度包线及破坏条件。同其他广义强度准则相比, 本研究给出的强度准则对于均质材料在复杂应力状态下更具有普遍适用性。

(4) 通过对 ROHACELL 闭孔泡沫强度破坏包线的计算及试验数据比较, 验证了该强度准则对 ROHACELL 泡沫材料的破坏预测非常适用。

### 参考文献

[1] 俞茂宏. 各项同性屈服函数的一般性质[C]. 西安: 西安交通大学

科学论文, 1961.

- [2] 俞茂宏, 何丽南, 刘春阳. 广义双剪应力屈服准则及其推广[J]. 科学通报, 1992, 37(2): 182-185.
- [3] 沈珠江. 关于破坏准则和屈服函数的总结[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(01): 1-8.
- [4] TRIANTAFILLOU T C, GIBSON L J. Constitutive modeling of elastic plastic open-cell foams[J]. Journal of Mechanics, 1990, 116: 2772-2775.
- [5] GIBSON L J, ASHBY F M, ZHANG J, et al. Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads I Modeling[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1989, 31(9): 635-63.
- [6] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [7] 俞茂宏. 工程强度理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [8] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, 10: 157-165.
- [9] DRUCKER D C, PRAGER W. Extended limit theorems for continuous media[J]. Quart of Appl Math, 1952, 10(2): 381-389.
- [10] DESHPANDE V S, FLECK N A. Isotropic constitutive models for metallic foams[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48: 1253-1283.
- [11] MILLER R E. A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2000, 42: 729-754.
- [12] LI Q M, MINES R A W, BIRCH R S. The crush behaviour of Rohacell 51WF structural foam[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37: 6321-6341.
- [13] BENDERLY D, PUTTER S. Characterization of the shear/compression failure envelope of Rohacell foam[J]. Polymer Testing, 2004, 23: 51-57.
- [14] BRESLER B, PISTER K S. Failure of plain concrete under combined stresses[J]. Trans ASCE, 1957, 122: 1049-1068.
- [15] 俞茂宏, 刘凤羽. 双剪应力三参数准则及其角隅模型[J]. 土木工程学报, 1988, 21(3): 90-95.
- [16] GIBSON L J, ASHBY M F. Cellular solids: structure and properties (Second Edition) [M]. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1997.
- [17] ROTH MA. ROHACELL The core for sandwich solutions: 3-D Failure Criteria [R]. Degussa, Rohm GmbH Presentation, 2007.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10602035); 航空科学基金资助项目研究计划(2006ZF57010)

收稿日期: 2008-10-20; 修订日期: 2009-04-21

作者简介: 陈秀华(1977), 男, 在职博士, 研究方向为飞行器结构强度计算和试验、复合材料力学分析, CAE 软件开发, 联系地址: 上海东川路 800 号空天科学技术研究院 1404(200240), E-mail: chenxiuhua@sjtu.edu.cn